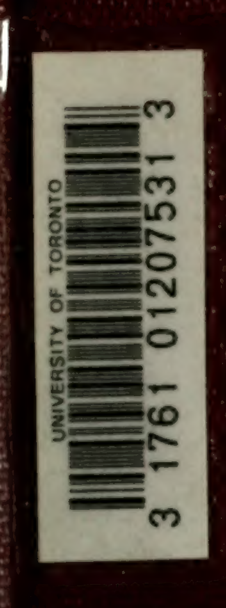

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01207531 3

HANDBUCH

DER THEORIE DER

CYLINDERFUNKTIONEN

VON

DR. NIELS NIELSEN

PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT KOPENHAGEN,
INSPEKTOR DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS AN DEN GYMNASIEN DÄNEMARKS.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

HERRN

PROFESSOR DR. C. NEUMANN

IN LEIPZIG

IN GRÖSSTER HOCHACHTUNG UND VEREHRUNG
GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Vorwort.

Die in diesem Handbuche entwickelte Theorie der Cylinderfunktionen weicht von früher gegebenen beträchtlich ab; in der Tat ist sie mit Ausnahme der Kapitel VII, XI, XXVI und XXVII zum größten Teile das Ergebnis eigener Untersuchungen. Natürlich ist trotzdem ein großer Teil der gewonnenen Sätze und Formeln, jedenfalls in etwas speziellerer Form, altbekannt.

Es ist überall mein Hauptbestreben gewesen, die Ergebnisse in möglichst allgemeiner Form und nach möglichst allgemeinen Prinzipien herzuleiten. Daher kommt es, daß ich im ersten Teile die Funktion $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ von Lommel und die ähnliche Funktion $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ so ausführlich behandelt habe; denn ohne eine eingehendere Theorie dieser Funktionen ist ja in der Tat die systematische Darstellung der Theorie der bestimmten Integrale mit Cylinderfunktionen sowie der Nullentwicklungen in den Schlömilchschen Reihen so gut wie unmöglich. Überdies ist zu bemerken, daß die Lommelsche Funktion schöne Anwendungen der Fourierschen Reihen nach Cylinderfunktionen erlaubt.

Die im zweiten Teile gegebene Theorie der bestimmten Integrale mit Cylinderfunktionen scheint ganz und gar neu zu sein und wird hier zum ersten Male veröffentlicht. Über die Anwendung der allgemeinen Prinzipien dieser Theorie habe ich noch zu bemerken, daß man die dort vorkommenden allgemeinen bestimmten Integrale mit Cylinderfunktionen durch die partikulären Integrale der allgemeinen Differentialgleichungen hätte ausdrücken können, so daß es nicht nötig gewesen wäre, jedesmal, wie es im Buche geschieht, eine besondere Konstantenbestimmung zu geben.

Indessen habe ich doch vorgezogen, dieser allgemeinen Methode *nicht* zu folgen, weil ich dann eine große Menge allgemeinerer Funktionen hätte einführen müssen, um sie schließlich doch nur für Spezialisierungen der Parameter zu brauchen. Dazu kommt aber noch, daß in diesem Falle die allgemeinen Konstantenbestimmungen, wie es scheint, überaus große Schwierigkeiten darbieten.

Was die Bezeichnungen betrifft, so schien es mir ratsam, den noch recht häufig gebrauchten Namen „*Besselsche Funktionen*“ überhaupt fallen zu lassen; denn erstens hat Bessel nur $J^{\nu}(x)$ und nur für ganze Werte des Parameters ν untersucht, und zweitens haben Daniel Bernoulli, Euler, Laplace, Parseval, Carlini, Fourier und Poisson diese Funktion jedenfalls vor der Veröffentlichung der Besselschen Abhandlung gekannt; man darf hier wohl auch auf die analogen Bezeichnungen wie *elliptische* und *Kugelfunktionen* hinweisen. Indessen hat doch eben Bessel zuerst die Grundzüge einer wirklichen Theorie der J-Funktion gegeben; daher schlage ich vor, die Funktion $J^{\nu}(x)$ als die *Besselsche Cylinderfunktion* zu bezeichnen, während ich $Y^{\nu}(x)$ die *Neumannsche Cylinderfunktion* nenne, weil Neumann zuerst die Funktion $Y^{n}(x)$ für willkürliche ganze Werte des Parameters n aufgestellt hat.

Die Cylinderfunktionen dritter Art oder die *Hankelschen Cylinderfunktionen* $H_1^{\nu}(x)$ und $H_2^{\nu}(x)$ scheinen hier zum ersten Male systematisch eingeführt zu werden, und doch sind gerade sie ihrer asymptotischen Ausdrücke wegen von fundamentaler Bedeutung.

Die Bezeichnung „*Besselsche Funktionen der zweiten Art*“ für die Funktionen $O^{n}(x)$, $S^{n}(x)$, $T^{n}(x)$ und $U^{n}(x)$ scheint mir ganz und gar *unrichtig;* denn erstens genügen diese Funktionen nicht den Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen, und zweitens habe ich die Existenz ganzer Funktionenklassen, die diese Bezeichnung ebensogut verdienen, außer allen Zweifel gesetzt; so findet man in meinem Buche ein solches System in $\mathfrak{O}^{n}(x)$, $\mathfrak{S}^{n}(x)$ und $\mathfrak{T}^{n}(x)$.

Da mein Handbuch nur die Theorie und die analytischen Anwendungen der Cylinderfunktionen bietet, die physikalischen Anwendungen aber gar nicht berührt, habe ich mit großer Sorgfalt ein, wie ich hoffe, ziemlich vollständiges Verzeichnis der gesamten Literatur über Theorie und Anwendungen der Cylinderfunktionen überhaupt geboten, so daß auch derjenige Leser, der die Anwendungen sucht, hier eine erste Orientierung finden dürfte.

Im Anhange findet man die im Texte gebrauchten Formeln und Lehrsätze aus andern in den Lehrbüchern gewöhnlich nicht behandelten Teilen der Analysis übersichtlich zusammengestellt und hier und da mit Beweisen versehen. Ein solcher Anhang empfahl sich besonders deshalb, damit die betreffenden Formeln im Texte nicht immer und immer wieder ausdrücklich niedergeschrieben zu werden brauchten.

Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, daß der letzte Abschnitt des Anhanges einige Zusätze und Berichtigungen zum Texte gibt.

Möchte nun mein Handbuch eine nachhaltige Anregung dazu geben, die Theorie der Cylinderfunktionen, indem man Mängel der jetzigen Theorie verbessert und etwaige Lücken ausfüllt, noch weiter auszubauen, damit diese Funktionen in Zukunft im Systeme der bekannten speziellen Funktionen wegen ihrer Einfachheit und Wichtigkeit unmittelbar nach den Kreisfunktionen eingeordnet werden können; die volle Berechtigung dazu gewährt ihre analytische Natur und ihre reiche Anwendbarkeit sowohl in der Analysis als in der mathematischen Physik.

Mit der Vollendung meines Handbuches der Theorie der Cylinderfunktionen einen wichtigen Abschnitt meiner Jugenduntersuchungen — vielleicht für immer — verlassend, empfinde ich es als teuere Pflicht, mehreren älteren Fachgenossen hier meinen herzlichsten Dank auszusprechen: den beiden großen Meistern Herrn Geheimrat Professor Dr. C. Neumann in Leipzig und Herrn Senator Professor Dr. U. Dini in Pisa, deren Schüler ich leider nur durch ihre Publikationen gewesen bin, die aber nicht nur meinen hierher gehörigen Untersuchungen, sondern meinen mathematischen Arbeiten überhaupt stets mit freundlichem Interesse gefolgt sind; den beiden ausgezeichneten dänischen Mathematikern S. Excellenz Herrn Kriegsminister V. H. O. Madsen, Generalmajor der Artillerie, und Herrn Dr. J. P. Gram, Direktor der Versicherungsanstalten „Hafnia“ und „Skjold“, die — ohne Vorlesungen zu halten — durch ihre Aufmunterung unter schwierigen Verhältnissen, durch ihre Ratschläge und durch ihre Kritik auf meine mathematische Entwicklung einen großen Einfluß gehabt haben; meinem Freunde Herrn Professor Dr. J. H. Graf in Bern für unsern schriftlichen und mündlichen Gedankenaustausch und Herrn Professor Dr. A. Wangerin in Halle für die ebenso wohlwollenden als gründlichen Besprechungen, die er im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* meinen zahlreichen Abhandlungen hat angedeihen lassen und die mir unter der Last der Arbeit eine starke Aufmunterung gewährt haben.

Endlich muß ich vor allem noch der Verlagsbuchhandlung für ihr freundliches Entgegenkommen und für die schöne Ausstattung des Buches meinen besten Dank aussprechen.

Kopenhagen, den 1. November 1903.

Dr. Niels Nielsen.

Inhalt.

Erster Teil.

Fundamentaleigenschaften der Cylinderfunktionen.

Kapitel I. **Die vier speziellen Cylinderfunktionen.**

Kapitel II. **Eigenschaften der willkürlichen Cylinderfunktionen.**

Kapitel III. **Elementare Integraldarstellungen und Verallgemeinerungen der Besselschen Cylinderfunktion.**

Kapitel IV. **Unbestimmte Integrale und unendliche Reihen mit Cylinderfunktionen.**

Zweiter Teil.

Bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen.

Seite

Kapitel XVII. **Anwendungen der dritten und vierten Methode.**

Kapitel XVIII. **Diskontinuierliche Faktoren.**

Dritter Teil.

Entwicklungen analytischer Funktionen nach Cylinderfunktionen.

Kapitel XIX. **Entwicklung einer Fakultätenreihe. Die Reihe $\Sigma a_n x^n J^{\nu+n}(x)$.**

Kapitel XX. **Die Neumannschen Reihen erster Art.**

Kapitel XXI. **Die Neumannschen Reihen zweiter Art.**

Kapitel XXII. **Die Kapteynschen Reihen erster und zweiter Art.**

Vierter Teil.

Darstellungen willkürlicher Funktionen durch Cylinderfunktionen.

Anhang. — Hilfsformeln und Zusätze.

ERSTER TEIL.

FUNDAMENTALEIGENSCHAFTEN DER CYLINDERFUNKTIONEN.

Kapitel I.

Die vier speziellen Cylinderfunktionen.

§ 1. Definition. Einführung von $J^\nu(x)$.

Wir bezeichnen als Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν eine willkürliche Lösung folgender zwei Funktionalgleichungen

$$C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x) = 2 D_x C^\nu(x), \tag{1}$$

$$C^{\nu-1}(x) + C^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} C^\nu(x), \tag{2}$$

die wir der Kürze halber häufig als erste, beziehungsweise zweite Funktionalgleichung der Cylinderfunktionen bezeichnen werden. Durch Addition oder Subtraktion von (1) und (2) erhält man folgendes andere System von Gleichungen

$$D_x C^\nu(x) = -\frac{\nu}{x} C^\nu(x) + C^{\nu-1}(x), \tag{3}$$

$$D_x C^\nu(x) = \frac{\nu}{x} C^\nu(x) - C^{\nu+1}(x), \tag{4}$$

die man statt (1) und (2) als Definition der Cylinderfunktionen nehmen kann; denn diese beiden Systeme von Gleichungen sind offenbar miteinander identisch.

Um nun den Ausdruck für die allgemeine Cylinderfunktion zu finden, beweisen wir zuerst, daß die Gleichungen (1) und (2) oder, was dasselbe ist, (3) und (4) eine Lösung besitzen, welche, vom Faktor x^ν abgesehen, eine ganze transcendente Funktion der zwei Veränderlichen x und ν ist. Wir betrachten daher vorläufig nur solche Cylinderfunktionen, für welche eine der drei Derivierten

$$D_x^2 C^\nu(x),\ D_x C^{\nu-1}(x),\ D_x C^{\nu+1}(x) \tag{5}$$

existiert; denn die Gleichungen (3) und (4) zeigen unmittelbar, daß, falls man nur eine von diesen Funktionen bilden kann, die beiden anderen gleichfalls existieren müssen.

Unter diesen Voraussetzungen findet man aus (4)

$$D_x^2 C^\nu(x) = -\frac{\nu}{x^2} C^\nu(x) + \frac{\nu}{x} D_x C^\nu(x) - D_x C^{\nu+1}(x);$$

nimmt man nun wieder aus (4) die Funktion $D_x C^\nu(x)$, während man $D_x C^{\nu+1}(x)$ aus (3), für $\nu + 1$ statt ν, entnimmt, so findet man

$$D_x^2 C^\nu(x) = \left(\frac{\nu^2}{x^2} - 1\right) C^\nu(x) + \frac{1}{x} C^{\nu+1}(x) - \frac{\nu}{x^2} C^\nu(x);$$

addiert man endlich zu dieser Formel die mit x dividierte Gleichung (4), so findet man für die oben erwähnten spezielleren Cylinderfunktionen folgende lineare Differentialgleichung der zweiten Ordnung

(6) $$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

die man häufig als die Besselsche Differentialgleichung bezeichnet. Hieraus geht hervor, daß sich die Cylinderfunktionen, für welche eine der Derivierten (5) existiert, in der ganzen x-Ebene, die zwei singulären Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen, regulär verhalten, weil sie immer der Differentialgleichung (6) Genüge leisten müssen.

Versucht man nunmehr die Gleichung (6) durch eine Reihe von der Form

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^{\varrho+n}$$

zu integrieren, wo die Koeffizienten a von x unabhängig sind, so erhält man zur successiven Bestimmung dieser Koeffizienten unmittelbar die allgemeine Rekursionsformel

(7) $$(\varrho - \nu + n)(\varrho + \nu + n) a_n + a_{n-2} = 0,$$

während der Anfangsexponent ϱ sich durch die Gleichung

(8) $$(\varrho - \nu)(\varrho + \nu) = 0$$

bestimmen läßt.

Betrachtet man zuerst die Wurzel $\varrho = +\nu$ und setzt man

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

so findet man aus (7) unmittelbar, daß

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n} n! \Gamma(\nu+n+1)}$$

sein müssen, so daß sich ein partikuläres Integral von (6) durch die Entwicklung

(9) $$y_1 = J^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

darstellen läßt, wo die willkürliche Potenz x^ν auf geeignete Weise definiert worden muß. Wenn ν keine rationale Zahl bedeutet, so ist die J-Funktion unendlich vieldeutig, weil sie dann im Punkte $x = 0$ einen Verzweigungspunkt hat, der durch Umlaufen der Variabeln x unendlich viele Werte der Funktion hervorbringen kann. Wir haben diese Verhältnisse später in § 5 zu untersuchen.

Es ist außer allem Zweifel, daß die Funktion $J^\nu(x)$ ein partikuläres Integral von (6) ist; dagegen ist es nicht sicher, ob sie auch den Funktionalgleichungen (1) und (2) genügt, d. h. ob sie wirklich eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν ist. Differentiiert man aber die zwei Produkte $x^{\pm\nu} J^\nu(x)$, so gibt die Reihenentwicklung (9) die folgenden zwei Formeln

(10) $$D_x(x^\nu J^\nu(x)) = x^\nu J^{\nu-1}(x), \quad D_x(x^{-\nu} J^\nu(x)) = -x^{-\nu} J^{\nu+1}(x),$$

die nach Ausführung der Differentiationen in (3) und (4) übergehen, womit wir bewiesen haben, daß $J^\nu(x)$ wirklich eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν sein muß.

Diese Funktion $J^\nu(x)$ nennen wir immer die Cylinderfunktion erster Art oder auch die Besselsche Cylinderfunktion.

Die zweite Wurzel der determinierenden Gleichung (8) gibt mittels (7) ohne weiteres die Funktion

(11) $$y_2 = J^{-\nu}(x)$$

als zweites partikuläres Integral von (6).

Diese Funktion kann indessen keine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν darstellen.

Setzen wir voraus, daß 2ν eine ganze Zahl ist, so bilden die beiden Wurzeln der determinierenden Gleichung (8) *eine* Gruppe, so daß wir in diesem Falle die zwei Integrale (9) und (11) miteinander zu vergleichen haben. Falls ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl bedeutet, so bleiben diese beiden Integrale voneinander stets linear unabhängig; wenn dagegen ν eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so hat man die Identität

(12) $$J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x);$$

denn in diesem Falle verschwinden wegen der Gammafunktionen im Nenner immer die n ersten Glieder der Reihenentwicklung für $J^{-\nu}(x)$.

Aus den hier angegebenen zwei Gründen brauchen wir $J^{-\nu}(x)$ niemals als independente Funktion, so daß wir ein anderes partiku-

läres Integral von (6) zu suchen haben, das immer von $J^\nu(x)$ linear unabhängig ist.

Sicher hat Daniel Bernoulli[1]) in seiner Untersuchung über die schwingende Saite zum ersten Male die Gleichung (6) und die Reihe (9) für $\nu = 0$ gefunden. Später hat wieder Euler[2]) diese spezielle Gleichung und Reihe untersucht; er hat auch die allgemeine Funktion $\Gamma(\nu + 1) J^\nu(x)$[3]) eingeführt, ohne jedoch die Funktionalgleichungen (1) und (2) zu bemerken. Carlini[4]) hat einen asymptotischen Ausdruck für $p!\, J^p(pe)$ für ein positives, ganzes und sehr großes p gegeben, während Fourier[5]) $J^0(x)$ als Entwicklungsfunktion benutzt, Poisson[6]) aber die Funktionen $J^n(x)$ und $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ eingeführt hat, wo n eine ganze und nicht negative Zahl bedeutet.

Bessel[7]) hat zuerst die Fundamentalgleichungen (1) und (2) für $J^n(x)$, n positiv und ganz vorausgesetzt, gefunden und übrigens die ersten Fundamente zu einer wirklichen Theorie dieser Funktion geliefert; eine solche Theorie ist von Neumann[8]) systematisch ausgebildet worden, während offenbar Lommel[9]) zum ersten Male einen willkürlichen Parameter ν systematisch verwendet hat.

§ 2. Fundamentaleigenschaften der Funktion $J^\nu(x)$.

Ehe wir das zweite partikuläre Integral von (6) in § 1 aufsuchen, scheint es uns angemessen, einige einfache Fundamentaleigenschaften der Besselschen Cylinderfunktion mitzuteilen, weil sie sich als unmittelbare Folgen der Definition (9) in § 1 ergeben:

1. *$x^{-\nu} J^\nu(x)$ ist eine ganze transcendente Funktion ihrer zwei Variabeln x und ν.*

2. *$x^{-\nu} J^\nu(x)$ ist, als Funktion von x^2 betrachtet, vom Genre Null.*

Bezeichnen wir also durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die Nullstellen von $x^{-\nu} J^\nu(x)$ mit nicht negativem reellen Teile, und ordnen wir sie so,

---

1) Commentarii Academiae Petropolitanae Bd. 6, p. 116, 118; 1732—33, Bd. 7, p. 171, 172; 1734—35.

2) Acta Academiae Petropolitanae 1781, p. 167—176, p. 185—190.

3) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae Bd. 10, p. 256; 1764.

4) Ricerche sulla convergenza della serie etc. Milano 1817. Astronom. Nachr. Bd. 30, col. 227, 240; 1849.

5) Théorie de la chaleur. 1822.

6) Journal de l'Éc. Pol. cahier 19, p. 300, 340; 1823.

7) Abhandl. der Akademie. Berlin 1824.

8) Theorie der Besselschen Funktionen. 1867.

9) Studien über die Besselschen Funktionen. 1868.

daß immer $|\alpha_{s+1}| \geqq |\alpha_s|$ ist, so gewinnt man eine Produktentwicklung von folgender Form:

$$(1) \qquad J^\nu x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(1-\frac{x^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\alpha_3^2}\right)\cdots.$$

Diese Formel ist die unmittelbare Folge eines allgemeinen Satzes von Hadamard[1]); indessen wollen wir sie später in § 136 noch direkt beweisen.

3. Benutzt man die Formel (Γ_4)[2]) für $\Gamma(2\omega)$, so ergeben sich ohne weiteres folgende zwei wichtige Formeln:

$$(2) \qquad J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot \sin x, \quad J^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot \cos x.$$

4. *Falls $|\nu|$ sehr groß ist, ohne daß es eine ganze negative Zahl bedeutet, während $|x|$ endlich bleibt, findet man den asymptotischen Ausdruck:*

$$(3) \qquad J^\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| < \frac{e^{\left|\frac{x^2}{4}\right|}-1}{|\nu+1|}.$$

Man findet nämlich unmittelbar:

$$(4) \qquad \varepsilon = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)},$$

so daß es einleuchtet, daß die einzelnen Glieder in der Reihenentwicklung für die in (3) angegebene höhere Grenze von $|\varepsilon|$ immer größer sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Glieder rechter Hand in (4), selbst in dem ungünstigsten Falle, daß $\Re(\nu)$ negativ und numerisch sehr groß angenommen wird, während die imaginäre Komponente von ν endlich bleibt.

Für den Fall, daß $\Re(\nu) > 0$ angenommen wird, geben wir später in § 103 eine viel genauere Bestimmung von $|\varepsilon|$.

5. *Die Cylinderfunktion der ersten Art läßt sich als Grenzfall der Kugelfunktionen darstellen; bedeuten nämlich ν und x willkürliche endliche Größen, so hat man die Formel:*

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty}\left(\frac{n!\,\Gamma(\nu+\varepsilon)\,2^{\nu+\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}\cdot\Gamma(2\nu+n)}\cdot K^{\nu,n}\left(\cos\frac{x}{n}\right)\right) = x^{\frac{1}{2}-\nu}J^{\nu-\frac{1}{2}}(x),$$

wo ε gleich 0 oder 1 zu nehmen ist, je nachdem n gerade oder ungerade vorausgesetzt wird.

---

1) Journal des Mathématiques (4) Bd. 9, p. 209; 1893.

2) So citiere ich immer der Kürze halber im Texte die Formeln der verschiedenen Abschnitte des Anhanges.

Wir bemerken zunächst, daß sich die Funktion unter dem Limes-Zeichen, die wir mit Ω_n bezeichnen wollen, mittels der Formeln (K_8) und (K_9) folgendermaßen schreiben läßt:

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
& 2^{\nu - \frac{1}{2}} \Omega_n = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} + \\
& + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s n!}{s!\,(n-s)!} \cdot \frac{(2\nu + n)(2\nu + n + 1) \cdots (2\nu + n + s - 1)}{\Gamma(\nu + s + \frac{1}{2})} \left(\sin \frac{x}{2n}\right)^{2s};
\end{aligned}
\right.
$$

es ist dann nicht schwer zu beweisen, daß Ω_n für ein unendlich wachsendes n eine ganze transcendente Funktion von x und von ν darstellen muß.

Erstens sei darauf hingewiesen, daß man für hinlänglich große n immer

$$
(7) \qquad \sin\left(\frac{x}{2n}\right) = \frac{x}{2n}(1 + \delta)
$$

setzen darf, wo

$$
(7\text{a}) \qquad |\delta| < \frac{|x|^2}{4n^2} \cdot e^{\frac{|x|^2}{4n^2}}
$$

ist. Beachtet man nun weiter, daß die Binomialformel für einen positiven ganzen Exponenten immer die Ungleichheit:

$$
(8) \qquad (1 + \alpha)^s < 1 + 2^s \alpha, \quad 0 < \alpha \leqq 1
$$

liefert, so bekommt man für den absoluten Betrag des Gliedes A_s unter dem Summenzeichen rechter Hand in (6) folgende Ungleichheit:

$$
\left|\Gamma\left(\nu + s + \frac{1}{2}\right)\right| \cdot |A_s| < \frac{\Gamma(2r + n + s)\,|x|^{2s}}{s!\,n^s 2^{2s} \cdot \Gamma(2r + n)}(1 + 2^{2s}|\delta|),
$$

wo r eine solche positive ganze Zahl bedeutet, daß

$$
r - 1 < |\nu| \leqq r;
$$

denn man hat offenbar:

$$
\frac{n!}{(n-s)!\,n^s} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{s-1}{n}\right) < 1.
$$

Benutzt man noch die Stirlingsche Formel (Γ_5), so erhält man weiter:

$$
|A_s| < \frac{K_s e^{-s} |x|^{2s}}{s!}\left(1 + \frac{s}{2r + n - 1}\right)^{2r + n - \frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2r + s - 1}{n}\right)^s,
$$

wo K_s eine endliche positive Zahl bedeutet. Nun ist aber:

$$
\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^s < e^{\alpha}, \quad s \leqq n, \quad \alpha > 0,
$$

und man bekommt somit endlich:

$$|A_s| < \frac{K_s |x|^{2s} e^{2r+s-1}}{s!},$$

woraus erhellt, daß:

$$(9) \qquad \sum_{m=0}^{m=q} |A_{s+m}| < K \sum_{m=0}^{m=q} \frac{(e|x|^2)^{s+m} e^{2r-1}}{(s+m)!}$$

sein muß, wo q eine willkürliche positive ganze Zahl bedeutet, während K der Maximalwert von $K_s, K_{s+1}, \dots, K_{s+q}$ ist.

Auf ähnliche Weise behandelt man die nach x oder ν genommene Derivierte von Ω_n, und somit ist unsere Behauptung über diese Funktion bewiesen.

Wir nehmen nun vorläufig an, daß ν und x beide positiv sind, und teilen die Summe rechter Hand in (6) in zwei andere, die erste von $s = 0$ bis $s = S$, die zweite von $s = S + 1$ bis $s = n$, wo S eine sehr große positive ganze Zahl bedeutet, die mit n über alle Grenzen wächst. Die Ungleichheit (9) zeigt dann unmittelbar, daß der absolute Betrag der letzteren der erwähnten Summen unter jede angebbare Größe herabsinkt, wenn n groß genug genommen wird, d. h. daß er kleiner als Θ_n angenommen werden kann, wo Θ_n eine kleine positive Größe bedeutet, die mit $1 : n$ der Grenze Null zustrebt.

Um die erste der beiden Summen zu behandeln, setzen wir:

$$B_s = \left(1 + \frac{2\nu}{n}\right)\left(1 + \frac{2\nu + 1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{2\nu + s - 1}{n}\right);$$

beachtet man nun weiter, daß

$$\left(1 + \frac{2\nu + r}{n}\right)\left(1 + \frac{2\nu + s - r}{n}\right) = 1 + \frac{4\nu + s}{n} + \frac{(2\nu + r)(2\nu + s - r)}{n^2}$$
$$< 1 + \frac{6\nu + 2s}{n}$$

sein muß, so findet man:

$$B_s < \left(1 + \frac{6\nu + 2s}{n}\right)^{\frac{s}{2}};$$

die Ungleichheit (8) ergibt dann weiter, daß

$$(10) \qquad B_s < 1 + \frac{2^{s'}(6\nu + 2s)}{n} = 1 + \varepsilon_s$$

ist, wo s' die Hälfte von s oder $s + 1$ bedeutet, je nachdem s gerade oder ungerade ist; wir haben demnach mittels (7) bewiesen, daß

$$\Omega_n = x^{\frac{1}{2}-\nu} J^{\nu-\frac{1}{2}}(x) + \Delta + \mathsf{E}_n$$

sein muß, wo

$$|\mathsf{E}_n| < \Theta_n + \sum_{s=1}^{s=S} \frac{\varepsilon_s + \delta + \varepsilon_s \delta}{s!\,\Gamma(\nu + s + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

ist, während

$$\Delta = \sum_{s=S+1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(\nu + s + 1)}$$

bedeutet.

Unsere Formel (5) ist also auch in dem oben erwähnten speziellen Falle bewiesen und somit allgemein gültig, weil ihre beiden Seiten ganze transcendente Funktionen in x und ν darstellen.

Für $\nu = \frac{1}{2}$ ist die Formel (5) von Mehler[1]), kurz nachher aber von allgemeineren Gesichtspunkten aus von Heine[2]) gefunden worden. Später hat Lord Rayleigh[3]) die Formel aufs neue bewiesen und mit ihr einige Fundamentaleigenschaften der Cylinderfunktionen aus denen der Kugelfunktionen hergeleitet, während Sharpe[4]) die Funktion linker Hand in (5) nach fallenden Potenzen von n zu entwickeln versucht hat. Für $\nu = 0$, $\nu = 1$ wird die Grenzformel (5) vermöge (K_{12}) und (K_{13}) eine *formale* Identität.

6. P. A. Hansen[5]) hat noch folgenden Grenzwert angegeben:

$$(11) \qquad J^\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \cdot F\left(\lambda, \lambda', \nu + 1, -\frac{x^2}{4\lambda\lambda'}\right),$$

wo F die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet, und wo λ und λ' über alle Grenzen wachsen. Der Beweis für diese Formel ist nur eine leichte Abänderung des vorigen, so daß wir ihn hier übergehen dürfen.

§ 3. Die Cylinderfunktion zweiter Art $Y^\nu(x)$.

Wenn wir das am Schlusse des § 1 erwähnte zweite partikuläre Integral der Besselschen Gleichung suchen, so haben wir es derart zu bestimmen, daß es erstens immer von $J^\nu(x)$ linear unabhängig ist und zweitens eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν darstellt. Wählt man nun aber zwei Funktionen

---

1) Journal für Math. Bd. 68, p. 140; 1868.

2) Journal für Math. Bd. 69; 1869. Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I, p. 184; Berlin 1878.

3) Proceedings of London Math. Soc. Bd. 9, p. 61—64; 1878.

4) Quarterly Journal Bd. 24, p. 383—386; 1890.

5) Leipziger Abhandlungen Bd. 2, p. 252; 1855.

$a(\nu)$ und $b(\nu)$, die beide von x unabhängig sind und außerdem den Bedingungen

$$a(\nu + 1) = a(\nu), \quad b(\nu + 1) = - b(\nu)$$

genügen, während $C^\nu(x)$ eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν bezeichnet, so haben die folgenden vier Funktionen

$$(1) \qquad a(\nu) C^{-\nu}(-x), \quad a(\nu) C^\nu(x), \quad b(\nu) C^{-\nu}(x), \quad b(\nu) C^\nu(-x)$$

offenbar wieder dieselbe Eigenschaft, d. h. sie leisten, wie eine einfache Rechnung unmittelbar darlegt, den beiden Funktionalgleichungen (1) und (2) des § 1 Genüge.

Nach diesen Überlegungen ist es sehr leicht, von $J^\nu(x)$ ausgehend, noch viele andere Cylinderfunktionen zu bilden, die immer von $J^\nu(x)$ linear unabhängig sind. Eine der einfachsten unter allen diesen neuen Funktionen ist offenbar die folgende:

$$(2) \qquad Y^\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left(\cos \nu\pi \, J^\nu(x) - J^{-\nu}(x) \right),$$

welche sich für ganze ν als Grenzwert darstellt.

Wir nennen immer die Funktion $Y^\nu(x)$ die Cylinderfunktion zweiter Art oder auch die Neumannsche Cylinderfunktion.

Die Formel (2) gibt ohne Mühe die zwei anderen:

$$(3) \qquad J^{-\nu}(x) = \cos \nu\pi \, J^\nu(x) - \sin \nu\pi \, Y^\nu(x),$$

$$(4) \qquad Y^{-\nu}(x) = \sin \nu\pi \, J^\nu(x) + \cos \nu\pi \, Y^\nu(x),$$

von denen die erste eine Verallgemeinerung von (12) in § 1 ist, während die zweite die ähnliche Formel

$$(5) \qquad Y^{-n}(x) = (-1)^n Y^n(x)$$

liefert, in der n eine ganze Zahl bedeutet. Aus (3) findet man weiterhin die neue Formel

$$(6) \qquad Y^{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n-1} J^{-n-\frac{1}{2}}(x),$$

in welcher n immer eine ganze Zahl bedeutet; somit gibt (2) in § 2 folgende ähnliche Formeln:

$$(7) \qquad Y^{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x, \quad Y^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x.$$

Setzt man noch voraus, daß $|\nu|$ sehr groß ist, ohne daß es eine negative ganze Zahl ist, während $|x|$ endlich bleibt, so gibt (3) in § 2 mittels der Eulerschen Formel (Γ_3) folgenden asymptotischen Ausdruck:

$$(8) \qquad Y^\nu(x) = -\frac{\Gamma(\nu)\, 2^\nu}{\pi x^\nu}(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| < \frac{e^{\left|\frac{x^2}{4}\right|} - 1}{|\nu - 1|}.$$

Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung des Grenzwertes der rechten Seite in (2), wenn ν eine ganze Zahl bedeutet, und dürfen dann, wie die Formel (5) deutlich zeigt, die negativen Werte von ν ausschließen. Die gewöhnliche Methode gibt ohne Mühe, wenn man die Formel (Γ_7) auf die ersten n Glieder anwendet, für die Neumannsche Cylinderfunktion den Ausdruck:

$$(9)\quad \begin{cases} \pi\cdot Y^n(x) = 2J^n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \sum\limits_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(s+n)!}\Big(\Psi(s+1)+\Psi(s+n+1)\Big) \\ \qquad - \sum\limits_{s=0}^{s=n-1}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}. \end{cases}$$

Aus (2) und (9) ergibt sich, daß die Neumannsche Cylinderfunktion immer, auch für ganze n, unendlich vieldeutig sein muß; wir wollen auf diese Frage später in § 5 näher eingehen.

Heine[1]) hat auch für die Neumannsche Cylinderfunktion eine zu § 2, (5) analoge Grenzformel angegeben, in welcher die Kugelfunktion der zweiten Art vorkommt; wir können indessen nicht näher auf diese Formel eingehen.

In früheren Zeiten, wo die allgemeinen Integraldarstellungen der Cylinderfunktionen noch nicht bekannt waren, teilte man den oben gegebenen Ausdruck für die Funktion $Y^n(x)$ in mehrere Summen, die man als neue Funktionen einführte und durch bestimmte Integrale ausdrückte. Da diese Funktionen noch immer in der Theorie der Cylinderfunktionen eine nicht unwichtige Rolle spielen, wollen wir hier die oben angegebene Teilung der rechten Seite in (9), indem wir Schläfli[2]) folgen, mitteilen.

Wir setzen also:

$$(10)\qquad S^n(x) = \sum_{s=0}^{s\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s}$$

und führen, indem

$$\lambda(s) = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{s},\quad \lambda(0)=0$$

bedeuten soll, noch folgende zwei neue Funktionen ein:

1) Journal für Mathematik Bd. 69, p. 131; 1869. Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I, p. 185; 1878.

2) Mathematische Annalen Bd. 3; 1871.

$$(11)\quad \begin{cases} T^n(x) = -\sum_{s=0}^{s \leq \frac{n-2}{2}} \frac{s!}{(n-s-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2s-2} \\ \qquad + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(s+n)!}\left(\Psi(s+n+1)-\Psi(s+1)\right), \end{cases}$$

$$(12)\qquad U^n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(n+s)!}\,\lambda(n+s).$$

Wir finden also aus (9), mit Hilfe der Formeln (Γ_{11}) und (Γ_{12}) für die Gaußsche Funktion $\Psi(x)$, noch folgende andere Darstellung der Neumannschen Cylinderfunktion:

$$(13)\qquad \pi \cdot Y^n(x) = 2J^n(x)\left(C + \log\frac{x}{2}\right) - S^n(x) + T^n(x) - 2\,U^n(x),$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet.

Wir bemerken, daß S eine rationale Funktion ist, während T und U ganze transcendente Funktionen in x und zwar mit rationalen Zahlenkoeffizienten bedeuten. Übrigens finden wir für die Funktion

$$\mathfrak{J}^n(x) = (D_\nu J^\nu(x))_{\nu=n} - J^n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right)$$

den Ausdruck:

$$(14)\qquad \mathfrak{J}^n(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{s!\,(s+n)!}\cdot\Psi(s+n+1);$$

aus (12) ergibt sich also unmittelbar, daß

$$(15)\qquad U^n(x) = CJ^n(x) - \mathfrak{J}^n(x)$$

sein muß, wo C wie gewöhnlich die Eulersche Konstante bedeutet. Wir bemerken noch, daß die Definition (2) für $Y^n(x)$ unmittelbar noch diese anderen Ausdrücke ergibt:

$$(16)\qquad \begin{cases} \pi \cdot Y^n(x) = (D_\nu J^\nu(x))_{\nu=n} + (-1)^n (D_\nu J^\nu(x))_{\nu=-n} \\ \pi \cdot Y^n(x) = 2(D_\nu J^\nu(x))_{\nu=n} + T^n(x) - S^n(x). \end{cases}$$

Die Funktionen S, T, U werden häufig Besselsche Funktionen zweiter Art genannt, eine Bezeichnung, die nicht zutreffend ist; denn erstens genügen diese Funktionen nicht den Fundamentalformeln der Cylinderfunktionen, aber wohl ähnlichen Gleichungen, und zweitens kann dieser Name mit ebensoviel Recht auf ganze Klassen solcher Funktionen übertragen werden; wir selbst geben in § 6 ein

neues System dieser Funktionen und deuten in § 40 wenigstens an, wie jedenfalls noch ein Funktionensystem dieser Art zu bilden ist. Es scheint uns daher ratsamer, diesen Namen ganz fallen zu lassen.

Über die Formel (9) haben wir noch zu bemerken, daß die Koeffizienten in der unendlichen Reihe rechter Hand nicht rationale Zahlen sind; um dies zu erreichen, muß man statt $Y^n(x)$ die andere Funktion:

$$\pi \cdot Y^n(x) - 2CJ^n(x) \tag{17}$$

einführen, wo C die Eulersche Konstante bedeutet. Die Funktion (17) ist gewiß eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter n, sie wird indessen die Formeln (3) und (4) umgestalten, und dasselbe gilt noch mehr für eine große Reihe anderer Formeln, wie unsere Untersuchungen über asymptotische Darstellungen und bestimmte Integrale späterhin zeigen werden.

Die Funktion $J^{-\nu}(x)$, die, wie wir schon in § 1 bemerkt haben, keine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν sein kann, ist bei den älteren Autoren, wenn ν nicht ganz ist, fast ausschließlich als zweites partikuläres Integral der Besselschen Gleichung benutzt worden. Dies ist ein ernstlicher Übelstand, weil dann eine große Menge von Formeln ihren einheitlichen Charakter verlieren, indem sie in zwei verschiedenen Formen dargestellt werden müssen, je nachdem ν ganz ist oder nicht; man vergleiche zum Beispiel die Arbeiten von Lommel[1]) und Sonin[2]). Diesem Übelstande entgeht man bei einem systematischen Gebrauche der Funktion $Y^\nu(x)$, auch wenn ν nicht ganz ist. Was $J^{-\nu}(x)$ betrifft, so muß sie, als independente Funktion, aus der Theorie der Cylinderfunktionen verbannt werden; ihre Existenzberechtigung ist ausschließlich die einer Hilfsfunktion für den Übergang von der Besselschen zur Neumannschen Cylinderfunktion.

Es leuchtet ein, daß die beiden Funktionen J und Y uns immer erlauben, die Besselsche Differentialgleichung vollständig zu integrieren; man findet nämlich als vollständiges Integral die Funktion:

$$y = a(\nu)J^\nu(x) + b(\nu)Y^\nu(x), \tag{18}$$

wo $a(\nu)$ und $b(\nu)$ arbiträre Funktionen von ν bedeuten, die aber unabhängig von x sind. Es läßt sich auch über diese willkürlichen Funktionen sehr leicht so verfügen, daß (18) den Gleichungen (1)

---

1) Mathematische Annalen Bd. 14 u. 16.

2) Mathematische Annalen Bd. 16.

und (2) des § 1 Genüge leistet, d. h. so, daß y eine Cylinderfunktion wird. Indessen läßt diese Methode eine Auflösung der oben erwähnten Gleichungen nur unter der Voraussetzung zu, daß die Funktionen (5) in § 1 existieren. Wir haben daher andere Methoden zu suchen, die uns die allgemeinste Lösung liefern können.

Zur Geschichte der Neumannschen Cylinderfunktion bemerken wir, daß unsere Definition (2) mit kleinen Abänderungen zuerst von Hankel[1]) und von Schläfli[2]) gebraucht worden ist; nur wird die Hankelsche Definition unbrauchbar, wenn ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl bedeutet. Für $\nu = 0$ ist die Reihe (9) als zweites Integral der entsprechenden Besselschen Gleichung von Euler[3]), Riemann[4]) und Meissel[5]) eingeführt. Vielleicht wurde diese Reihenentwicklung gefunden, indem man die allgemeine Besselsche Gleichung nach ν differentiierte und dann $\nu = 0$ setzte; jedenfalls gibt diese Methode genau die Funktion $Y^0(x)$, wird aber für andere ganzzahlige Werte von ν unbrauchbar.

Wie wir später in den §§ 16, 18 zeigen wollen, haben Euler[6]) und Poisson[7]) Integralausdrücke für $Y^0(x)$ gefunden; indessen ist es zuerst C. Neumann[8]) gelungen, für $Y^n(x)$ einen allgemeinen Ausdruck zu finden. Die Y-Funktion, die Lommel[9]) eingeführt hat, ist allerdings, wie schon V. A. Julius[10]) und Schafheitlin[11]) bemerkt haben, keine Cylinderfunktion, sondern nur ein partikuläres Integral der Besselschen Gleichung.

Die wirkliche Bestimmung von $Y^n(x)$ bot also für eine Zeit bedeutende Schwierigkeiten dar, in welcher die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen noch wenig bekannt war. Wie Ette[12]) neuerdings in seiner dänischen Ausgabe der Fundamental-

---

1) Mathematische Annalen Bd. 1, p. 472; 1869.

2) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 135; 1871.

3) Acta Academiae Petropolitanae 1781, p. 189—190.

4) Poggendorff Annalen Bd. 95; 1855. Mathematische Werke 2. Aufl. p. 57—60.

5) Gewerbeschulprogramm Iserlohn 1862.

6) Institutiones calculi integralis Bd. 2, p. 235; 1769.

7) Journal de l'École Polytechnique cahier 19, p. 476; 1823.

8) Theorie der Besselschen Funktionen p. 52; 1867.

9) Studien über die Besselschen Funktionen p. 86; 1868.

10) Archives Néerlandaises Bd. 28, p. 221—225; 1895.

11) Journal für Mathematik Bd. 114, p. 38; 1895.

12) G. Frobenius: Om Integration af lineære Differentialligninger ved Rækkeudviklinger p. 23. Kopenhagen 1903.

abhandlung von Frobenius[1]) gezeigt hat, gibt diese schöne Methode ohne Mühe als zweites partikuläres Integral der Besselschen Gleichung Funktionen, die mit $Y^n(x)$ übereinstimmen.

§ 4. Die Cylinderfunktionen dritter Art $H_1^\nu(x)$ und $H_2^\nu(x)$.

Wie unsere Einführung der Cylinderfunktion erster Art deutlich zeigt, ist diese Funktion offenbar diejenige, die sich am einfachsten von den Fundamentalgleichungen aus darbietet; ebenso zeigt die Definition der Cylinderfunktion der zweiten Art, daß sie jedenfalls unter allen übrigen, welche in unendlicher Anzahl auftreten, eine der einfachsten ist. Sicher sind diese zwei Funktionen auch die einfachsten für die Ausbildung der systematischen Theorie der Cylinderfunktionen; indessen ist es nicht außer allem Zweifel, daß sie auch für die zahlreichen Anwendungen der Cylinderfunktionen am vorteilhaftesten zu Grunde gelegt werden können.

Zum Beispiel sind die Formeln (3) und (4) des § 3 für $J^{-\nu}(x)$ und $Y^{-\nu}(x)$ für die Anwendungen nicht sehr bequem; da diese Reduktion recht häufig vorkommt, fordern eben die oben erwähnten Formeln zur Aufsuchung anderer Cylinderfunktionen auf, für welche diese Reduktion einfacher wird. Unter solchen Funktionen scheinen folgende zwei

$$(1) \qquad H_1^\nu(x) = J^\nu(x) + iY^\nu(x), \quad H_2^\nu(x) = J^\nu(x) - iY^\nu(x),$$

die ja auch immer linear unabhängig sind, die bequemsten zu sein; für sie bekommt man nämlich die zwei einfachen Reduktionsformeln:

$$(2) \qquad H_1^{-\nu}(x) = e^{\nu\pi i} \cdot H_1^\nu(x), \quad H_2^{-\nu}(x) = e^{-\nu\pi i} \cdot H_2^\nu(x).$$

Dazu kommt erstens noch, daß auch die Umlaufsrelationen dieser Funktionen sehr einfach sind, zweitens, daß sie am häufigsten als Werte bestimmter Integrale auftreten, viel häufiger als J und Y, drittens aber, daß sich die H-Funktionen für äußerst große Werte von $|x|$ wie eine Exponentialfunktion verhalten.

Aus diesen Gründen scheint es uns angemessen, die H-Funktionen neben J und Y als Cylinderfunktionen dritter Art oder Hankelsche Cylinderfunktionen einzuführen.

In der Tat spielen diese Funktionen eine Hauptrolle in der Untersuchung von Hankel[2]) über die asymptotische Darstellung

1) Journal für Mathematik Bd. 76.

2) Mathematische Annalen Bd. 1, p. 491; 1869.

der Cylinderfunktionen; überdies hat Hankel[1] in seiner Untersuchung über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen gelegentlich H_1 benutzt, ohne doch ihre Eigenschaften und fundamentale Bedeutung recht erkannt zu haben. Später hat H. Weber[2] die Funktion H_1 wieder benutzt, und in den letzten Jahren haben Dougall[3] und Aldis[4] die Funktion H_1 statt Y neben J eingeführt, während Graf und Gubler[5] Funktionen einführen, die sehr nahe mit $H_1^\nu(x)$ und $H_2^\nu(x)$ verwandt sind, ohne doch davon systematischen Gebrauch zu machen.

Die Definitionen der Hankelschen Cylinderfunktionen sind indessen viel komplizierter als die der Funktionen J und Y; dazu kommt noch, daß die H-Funktionen mit reellem Argumente und Parameter immer imaginär sein müssen, während die Funktionen der ersten und zweiten Art so definiert werden können, daß sie reell sind, wenn der Parameter reell und das Argument positiv vorausgesetzt wird.

Dagegen sind die Hankelschen Cylinderfunktionen, von einem einfachen Faktor abgesehen, für gewisse rein imaginäre Werte des Argumentes reell, vorausgesetzt, daß der Parameter reell ist. Führt man nämlich in der Definition der H-Funktionen statt Y den Ausdruck (2) des § 3 ein, so findet man:

$$H_1^\nu(x) = \frac{i}{\sin \nu\pi}\left(e^{-\nu\pi i}J^\nu(x) - J^{-\nu}(x)\right), \tag{3}$$

$$H_2^\nu(x) = \frac{-i}{\sin \nu\pi}\left(e^{\nu\pi i}J^\nu(x) - J^{-\nu}(x)\right); \tag{4}$$

unter diesen Formen treten die H-Funktionen und dann insbesondere H_1 in den älteren Arbeiten über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen am häufigsten auf. Erinnert man sich aber, daß die Funktion

$$e^{\mp\frac{\nu\pi i}{2}} J^\nu\left(x e^{\pm\frac{\pi i}{2}}\right)$$

so definiert werden kann, daß sie für positive x und reelle ν reell ist, so findet man aus (3) und (4) das bemerkenswerte Resultat:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 458; 1875.

2) Mathematische Annalen Bd. 6, p. 147; 1873.

3) Proceedings of the Royal Society of London Bd. 66, p. 32—42; 1900.

4) Proceedings of the Math. Soc. Edinbg. Bd. 18, p. 37—83; 1900.

5) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen Heft I, p. 42; Bern 1898.

Wenn x positiv und ν reell vorausgesetzt wird, so können die zwei Funktionen

$$(5)\qquad e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_1^\nu\left(x e^{\frac{\pi i}{2}}\right),\quad e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_2^\nu\left(x e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)$$

so definiert werden, daß sie beide reell sind.

Es ist nämlich offenbar, daß die Hankelschen Cylinderfunktionen immer in $x = 0$ einen Verzweigungspunkt haben, so daß sie unendlich vieldeutig sind; wir wollen im folgenden Paragraphen dies Verhältnis näher auseinander setzen. Hier haben wir noch zu erwähnen, daß die Formeln (2) des § 2 und (7) des § 3 folgende vier anderen liefern:

$$(6)\qquad H_1^{\frac{1}{2}}(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{ix},\quad H_1^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{ix};$$

$$(7)\qquad H_2^{\frac{1}{2}}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{-ix},\qquad H_2^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{-ix}.$$

§ 5. Umlaufsrelationen der vier speziellen Cylinderfunktionen.

Wir haben schon ausdrücklich bemerkt, daß die vier speziellen Cylinderfunktionen, die Besselsche mit ganzem Parameter allein ausgenommen, in $x = 0$ eine singuläre Stelle haben. Um die entsprechenden Umlaufsrelationen zu finden, bezeichnen wir mit p eine willkürliche ganze Zahl und erhalten somit für die J-Funktion die Formel

$$(1)\qquad J^\nu(x e^{p\pi i}) = e^{p\nu\pi i} J^\nu(x),$$

so daß die Verzweigung für die Besselsche Cylinderfunktion eine rein multiplikative ist, während sie für die drei anderen Funktionen sowohl eine multiplikative wie eine additive sein muß.

Für die Neumannsche Cylinderfunktion findet man nämlich:

$$(2)\qquad Y^\nu(x e^{p\pi i}) = e^{-p\nu\pi i}\, Y^\nu(x) + \frac{2i\cos(\nu\pi)\sin(p\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)}\cdot J^\nu(x),$$

und für die Hankelschen Funktionen:

$$(3)\qquad \begin{cases} H_1^\nu(x e^{p\pi i}) = \cos(p\nu\pi) H_1^\nu(x) + i\sin(p\nu\pi) H_2^\nu(x) \\ \qquad\qquad - \dfrac{2\cos(\nu\pi)\sin(p\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} J^\nu(x), \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} H_2^\nu(x e^{p\pi i}) = \cos(p\nu\pi) H_2^\nu(x) + i\sin(p\nu\pi) H_1^\nu(x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{2\cos(\nu\pi)\sin(p\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} J^\nu(x). \end{cases}$$

Bedeutet nun p eine gerade Zahl, so geben diese vier Formeln unmittelbar die gesuchten Umlaufsrelationen. Bedeutet außerdem ν eine ganze Zahl, so werden die Umlaufsrelationen für Y und für die zwei H-Funktionen ganz ähnlich; wenn ν dagegen die Hälfte einer ganzen ungeraden Zahl bedeutet, sind alle vier Formeln einander ähnlich.

Wir setzen nun im allgemeinen

$$x = |x| e^{i\Theta}, \tag{5}$$

wo Θ einen reellen Winkel bedeutet; es ist dann offenbar, daß die vier speziellen Cylinderfunktionen vermöge der oben gegebenen Formeln vollständig bekannt sind, falls man sie nur für $\alpha < \Theta \leqq \alpha + \pi$ kennt, wo α einen ganz willkürlichen reellen Winkel bedeutet. Die asymptotischen Reihen, welche wir in § 58 für die Cylinderfunktionen zu entwickeln haben, zeigen, daß es natürlich ist, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ zu setzen; daher wollen wir immer von folgender Definition Gebrauch machen:

Falls der Winkel Θ in (5) so gewählt wird, daß $-\frac{\pi}{2} < \Theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist, nennen wir den zugehörigen Wert einer Cylinderfunktion ihren Hauptwert, so daß also dieser Hauptwert für J und Y immer reell sein muß, wenn das Argument x positiv und der Parameter ν reell vorausgesetzt wird.

Der Begriff des Hauptwertes einer Cylinderfunktion ist wohl zuerst von Schafheitlin[1]) eingeführt worden und zwar für die Y-Funktion. Setzt man noch in (3) und (4) $p = 1$, beziehungsweise $p = -1$, so findet man:

$$H_1^{\nu}(xe^{\pi i}) = -H_2^{-\nu}(x) = e^{-(\nu+1)\pi i} H_2^{\nu}(x), \tag{6}$$

$$H_2^{\nu}(xe^{-\pi i}) = -H_1^{-\nu}(x) = e^{(\nu+1)\pi i} H_1^{\nu}(x), \tag{7}$$

Formeln, die keine Analogien für die Y-Funktion haben und in der Tat höchst merkwürdig sind.

Greifen wir noch auf die Formeln (2) des § 4 zurück, so sehen wir, daß die H-Funktionen für den Zeichenwechsel des Parameters und des Argumentes dieselben einfachen Eigenschaften wie die J-Funktion für den Zeichenwechsel des Argumentes besitzen. Diese Eigenschaft der Hankelschen Cylinderfunktionen, welche sie viel geschmeidiger macht als die zwei anderen, wird uns späterhin von großem Nutzen sein.

---

1) Archiv der Mathematik und Physik (3) Bd. 1, p. 133; 1901.

§ 6. Über das Produkt $J^\nu(\alpha x) J^\varrho(\beta x)$.

Nachdem wir im vorhergehenden die Fundamentaleigenschaften der vier speziellen Cylinderfunktionen dargelegt haben, wenden wir uns nunmehr zu einer Produktformel, welche auch in die Theorie dieser Funktionen tief eingreift. Zu diesem Zwecke wenden wir die Regel von Cauchy für die Multiplikation zweier unendlichen Reihen an und erhalten somit ohne Schwierigkeit die Formel:

$$(1)\qquad J^\nu(\alpha x) J^\varrho(\beta x) = \alpha^\nu \beta^\varrho \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s A^{\nu,\varrho,s}(\alpha,\beta) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho+2s},$$

wo wir der Kürze halber

$$(2)\qquad \sum_{p=0}^{p=n} \frac{\alpha^{2n-2p}\beta^{2p}}{p!\,(n-p)!\,\Gamma(\nu+n-p+1)\,\Gamma(\varrho+p+1)} = A^{\nu,\varrho,n}(\alpha,\beta)$$

oder noch einfacher

$$(3)\qquad \frac{\alpha^{2n}}{n!\,\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot F\left(-\nu-n,\,-n,\,\varrho+1,\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) = A^{\nu,\varrho,n}(\alpha,\beta)$$

gesetzt haben, während F die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet.

Beschränken wir uns auf den einfachen Fall $\alpha = \beta = 1$, so finden wir mittels (F_2) und (Γ_8) die einfache Formel:

$$(4)\qquad J^\nu(x) J^\varrho(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{\Gamma(\varrho+s+1)\,\Gamma(\nu+s+1)} \binom{\nu+\varrho+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho+2s},$$

die in ihrer vollen Allgemeinheit von Schönholzer[1]) gegeben worden ist, und aus welcher man eine große Menge anderer Formeln herleiten kann.

Setzt man zuerst in (4) $\varrho = \pm\frac{1}{2}$, so erhält man mittels (Γ_4) und (2) in § 2 folgende zwei Entwicklungen:

$$(5)\qquad J^\nu(x)\cos x = \frac{(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu+2n+\frac{1}{2})}{(2n)!\,\Gamma(2\nu+2n+1)} (2x)^{2n},$$

$$(6)\qquad J^\nu(x)\sin x = \frac{(2x)^\nu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu+2n+\frac{3}{2})}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu+2n+2)} (2x)^{2n+1},$$

---

1) Über die Auswertung bestimmter Integrale mit Hilfe von Veränderungen des Integrationsweges p. 15; Bern 1877.

welche für $\nu = 0$ schon von Bessel[1]) gegeben worden sind, während Lommel[2]) wohl zuerst die allgemeinen Formeln bewiesen hat.

Addiert oder subtrahiert man die Gleichungen (5) und (6), nachdem man sie mit $\cos x$, respektive $\sin x$ oder umgekehrt multipliziert hat, so findet man zwei neue Formeln; aus (5) und (6) erhält man auch unmittelbar die andere:

$$(7)\qquad J^{\nu}(x)e^{\pm ix} = \frac{(2x)^{\nu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma(2\nu+n+1)}(\pm 2xi)^{n}.$$

Offenbar gelten ähnliche Formeln auch für die Produkte $J^{n}(x)\,Y^{\nu}(x)$ und $Y^{n}(x)\,Y^{\nu}(x)$, wo n und ν ganze Zahlen bedeuten. Man findet zum Beispiel folgende einfache Entwicklung dieser Art:

$$(8)\quad \begin{cases} \pi J^{0}(x)Y^{0}(x) = 2\,(J^{0}(x))^{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) + \\ \qquad + 2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n}\binom{2n}{n}}{n!\,n!}\Big(\Psi(n+\frac{1}{2})-\Psi(n+1)\Big)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \end{cases}$$

Übrigens bemerken wir, daß sich diese Formeln mittels der Methode von Frobenius[3]) unmittelbar aus den linearen Differentialgleichungen des Kapitel IX herleiten lassen.

Wir kehren nun zur Formel (7) zurück, um eine neue Darstellung der Neumannschen Cylinderfunktion zu erhalten. Wir beschränken uns auf das obere Zeichen von i und finden dann mittels (16) in § 3 für die Y-Funktion ohne Mühe folgenden andern Ausdruck:

$$(9)\qquad \pi\cdot Y^{n}(x) = 2(D_{\nu}J^{\nu}(x))_{\nu=n} + \mathfrak{T}^{n}(x) - \mathfrak{S}^{n}(x),$$

wo wir der Kürze halber

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{2\,(2x)^{n}}{\sqrt{\pi}\,e^{ix}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(n+s+\frac{1}{2})\,(2xi)^{s}}{s!\,(s+2n)!}\Big(\lambda(s+2n)-\lambda(s)\Big) - \\ -\frac{2\cdot i^{-n}}{\sqrt{\pi}\,e^{ix}}\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^{s}\Gamma(s+\frac{1}{2})\,(n-s-1)!}{(s+n)!}(2xi)^{s} = \mathfrak{T}^{n}(x) \end{cases}$$

und

$$(11)\qquad \frac{2\sqrt{\pi}i^{n}}{e^{ix}}\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(2n-s-1)!}{s!\,\Gamma(n-s+\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2xi}\right)^{n-s} = \mathfrak{S}^{n}(x)$$

gesetzt haben.

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 39.
2) Studien über die Besselschen Funktionen 1868, p. 17.
3) Journal für Mathematik Bd. 76.

Diese zwei neuen Funktionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ sind, wie wir später zeigen wollen, zu den altbekannten S und T überall analog; sie verdienen also in der Tat ebenso gut wie diese als Besselsche Funktionen zweiter Art bezeichnet zu werden, wenn es nicht besser wäre, diese Bezeichnung für immer fallen zu lassen.

Vergleicht man nun die Formel (9) mit (16) in § 3, so findet man, daß

$$T^n(x) - S^n(x) = \mathfrak{T}^n(x) - \mathfrak{S}^n(x) \tag{12}$$

sein muß; aus dieser Identität leitet man nun sehr leicht die zwei anderen ab:

$$\mathfrak{T}^n(x) - (-1)^n \mathfrak{T}^n(-x) = \mathfrak{S}^n(x) - (-1)^n \mathfrak{S}^n(-x), \tag{13}$$

$$\mathfrak{T}^n(x) + (-1)^n \mathfrak{T}^n(-x) - 2T^n(x) = \mathfrak{S}^n(x) + (-1)^n \mathfrak{S}^n(-x) - 2S^n(x). \tag{14}$$

Nun zeigen in der Tat diese Identitäten, daß die zwei Funktionen rechter Hand ganze transcendente Funktionen sein müssen; für sie haben wir späterhin in den §§ 19, 20 einfache Integralausdrücke herzuleiten.

§ 7. Fundamentalformel von Lommel.

Die allgemeine Produktformel (4) des § 6 scheint recht unbeachtet geblieben zu sein und doch erlaubt sie, den vorteilhaftesten Beweis einer der wichtigsten Formeln in der ganzen Theorie der Cylinderfunktionen herzuleiten. Setzt man nämlich in der oben erwähnten Formel $\varrho = -\nu - p - 1$, wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und zerlegt man die Summe rechter Hand in zwei andere, von welchen die erste von $n = 0$ bis $n = p$, die zweite von $n = p + 1$ bis $n = \infty$ geht, so bekommt man:

$$(1) \quad \begin{cases} J^{\nu}(x) J^{-\nu-p-1}(x) = \sum\limits_{n=0}^{n=p} \dfrac{(-1)^n \binom{2n-p-1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p-1}}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(n-p-\nu)} \\ \qquad + (-1)^{p+1} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{(-1)^n \binom{2n+p+1}{n+p+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1}}{\Gamma(n+1-\nu)\Gamma(n+p+1+\nu)}. \end{cases}$$

Nun ist es aber einleuchtend, daß die letzte dieser Summen nichts anderes ist als das Produkt:

$$(-1)^{p+1} J^{-\nu}(x) J^{\nu+p+1}(x);$$

was die erste Summe betrifft, so verschwinden die Binomialkoeffizienten, wenn $2n \geqq p + 1$ ist. Für die vorhergehenden Terme findet man dagegen allgemein:

$$\frac{(-1)^n \binom{2n-p-1}{n}}{\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(n-p-\nu)} = (-1)^n \frac{(2n-p-1)(2n-p-2)\cdots(n-p)}{n!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n-p-\nu)(n-p+1-\nu)\cdots(-n-1-\nu)}{\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(-n-\nu)};$$

wendet man nun die Formel (Γ_3) auf das Produkt im letzten Nenner rechter Hand an, so findet man folgenden eleganten Ausdruck:

$$(-1)^{n+p+1} \cdot \frac{\sin\nu\pi}{\pi} \cdot \frac{(p-n)!}{n!} \binom{\nu+p-n}{p-2n}.$$

Führt man also die in x und ν rationale Funktion:

$$R^{\nu,p}(x) = \sum_{s=0}^{<\frac{p+1}{2}} \frac{(-1)^s (p-s)!}{s!} \binom{\nu+p-s}{p-2s} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2s} \tag{2}$$

ein, für welche wir den Namen *Lommelsches Polynom* vorschlagen, so gibt (1) die elegante Formel:

$$\left\{\begin{aligned} &J^\nu(x) J^{-\nu-p-1}(x) + (-1)^p J^{-\nu}(x) J^{\nu+p+1}(x) = \\ &\qquad = (-1)^{p+1} \cdot \frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \cdot R^{\nu,p}(x), \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die Lommel[1]) auf ganz andere Weise gefunden hat. Führt man nun mittels (3) in § 3 die Y-Funktion ein, so findet man die noch einfachere Formel:

$$Y^\nu(x) J^{\nu+p+1}(x) - Y^{\nu+p+1}(x) J^\nu(x) = \frac{2}{\pi x} \cdot R^{\nu,p}(x), \tag{4}$$

die ebenfalls von Lommel[2]) gefunden worden ist.

Setzt man noch in (3) und (4) $p = 0$ und $\nu - 1$ für ν, so findet man die spezielleren Formeln:

$$J^\nu(x) J^{-\nu+1}(x) + J^{\nu-1}(x) J^{-\nu}(x) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}, \tag{5}$$

$$Y^{\nu-1}(x) J^\nu(x) - Y^\nu(x) J^{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x}, \tag{6}$$

welche Lommel[3]) zum Ausgangspunkt für seinen Beweis der allgemeinen Formeln genommen hat.

Wir haben noch zu bemerken, daß Weber[4]) beinahe zu gleicher Zeit wie Lommel die Formel (6) fand, und daß Hankel[5]) dieselbe

---

1) Mathematische Annalen Bd. 4, p. 109; 1871.
2) loc. cit. p. 111. 3) loc. cit. p. 105.
4) Journal für Mathematik Bd. 76, p. 10; 1873.
5) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 458; 1875.

Formel schon einige Jahre vorher gefunden hatte, ohne sie aber zu veröffentlichen.

Hankel und Weber beweisen die Formel (6) durch Zuhilfenahme eines Satzes von Abel[1]) über die aus J und Y gebildete Funktionaldeterminante, welcher von Fuchs[2]) verallgemeinert worden ist. Man findet dadurch, daß

$$J^\nu(x) D_x Y^\nu(x) - Y^\nu(x) D_x J^\nu(x) = A \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}}$$

oder vermöge (3) des § 1

$$J^\nu(x) Y^{\nu-1}(x) - Y^\nu(x) J^{\nu-1}(x) = \frac{A}{x}$$

sein muß, wo die Konstante A bestimmt werden kann, wenn man nach ausgeführter Multiplikation durch x diese Variabele gleich Null setzt.

Wir werden später in § 16 noch mehrere Beweise für die Formel (6) herleiten; jedoch ist der erste hier mitgeteilte der vorteilhafteste von allen, weil er uns sogleich die allgemeinere Formel (4) gibt.

§ 8. Verallgemeinerungen einiger Formeln von Bessel.

Wir haben noch eine andere Anwendung der allgemeinen Produktformel (1) des § 6 zu geben, indem wir die oben gegebenen Besselschen Reihenentwicklungen noch weiter verallgemeinern. Zu diesem Zwecke betrachten wir das Polynom:

$$A^{\nu,\nu,n}(2\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2),$$

in welchem wir die einzelnen Glieder nach der Binomialformel entwickeln und dann nach steigenden Potenzen von β ordnen. Auf diese Weise finden wir als Koeffizienten des Terms $\alpha^{4n-2s}\beta^{2s}$, $0 \leqq s \leqq 4n$, den Ausdruck:

$$a_{2s} = \sum_{r=0}^{r=s} \frac{(2n-2r)!\, 2^{2r}}{r!\,(n-r)!\,(s-r)!\,(2n-s-r)!\,\Gamma(\varrho+r+1)\,\Gamma(\nu+n-r+1)};$$

wendet man nun auf die Gammafunktion im Zähler die Formel (Γ_4) an, so findet man, nachdem man $\varrho = -\frac{1}{2}$ gesetzt,

$$a_{2s} = \frac{2^{2n}}{n!\,(2n-s)!\,\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}} \cdot F(-n, -2s+n, \nu+1, 1),$$

1) Citat von Hankel; loc. cit. p. 457.

2) Journal für Mathematik Bd. 66.

so daß die Gaußsche Formel (F_2) unmittelbar den einfacheren Ausdruck gibt:

$$a_{2s} = \frac{2^{2n}}{n!\,(2n-s)!\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+2s+1)}{\Gamma(\nu+s+1)\Gamma(\nu+1+2n-s)};$$

man findet so die bemerkenswerte Formel:

$$(1) \qquad A^{\nu,-\frac{1}{2},n}(2\alpha\beta, \alpha^2+\beta^2) = \frac{2^{2n}\Gamma(\nu+2n+1)}{\sqrt{\pi}} \cdot A^{\nu,\nu,2n}(\alpha,\beta),$$

während man auf ähnliche Weise die analoge Formel findet:

$$(2) \quad (\alpha^2+\beta^2)A^{\nu,\frac{1}{2},n}(2\alpha\beta,\alpha^2+\beta^2) = \frac{2^{2n+1}\Gamma(\nu+2n+2)}{\sqrt{\pi}} \cdot A^{\nu,\nu,2n+1}(\alpha,\beta).$$

Erinnert man sich noch der Formeln (2) des § 2, so findet man die drei Entwicklungen:

$$(3) \quad J^\nu\left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}x\right) = \left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2^{2s}}\cdot\Gamma(\nu+2s+1)A^{\nu,\nu,2s}(\alpha,\beta)x^{2s},$$

$$(4) \quad J^\nu\left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}x\right) = \left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2^{2s+1}}\cdot\Gamma(\nu+2s+2)A^{\nu,\nu,2s+1}(\alpha,\beta)x^{2s+1},$$

$$(5) \qquad J^\nu\left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)e^{\pm\frac{ix}{4}(\alpha^2+\beta^2)} = \left(\frac{\alpha\beta x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}\Gamma(\nu+s+1)A^{\nu,\nu,s}(\alpha,\beta)\left(\frac{\pm xi}{2}\right)^s,$$

welche sehr eigentümlich sind, wenn man sie mit der allgemeinen Produktformel (1) des § 6 vergleicht; setzt man $\alpha = \beta$, so ergeben sich die in § 6 mitgeteilten verallgemeinerten Besselschen Entwicklungen (5), (6) und (7).

Kapitel II.

Eigenschaften der willkürlichen Cylinderfunktionen.

§ 9. Bestimmung der allgemeinen Cylinderfunktionen.

Die Eigenschaften der vier speziellen Cylinderfunktionen, welche wir im vorigen Kapitel entwickelt haben, erlauben uns nun, ohne Schwierigkeit die zwei Funktionalgleichungen (1) und (2) des § 1 vollständig aufzulösen, d. h. die allgemeinen Cylinderfunktionen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zuerst die letzte dieser Gleichungen:

$$(1) \qquad F^{\nu-1}(x) + F^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} F^{\nu}(x),$$

die in Bezug auf ν eine lineare homogene *Differenzengleichung* der zweiten Ordnung ist.

Wir setzen voraus, daß $F_1^{\nu}(x)$ und $F_2^{\nu}(x)$ zwei verschiedene Lösungen dieser Gleichung bedeuten, die so beschaffen sind, daß die sechs Funktionswerte, welche in (1) vorkommen, wirklich existieren; sonst machen wir über diese Lösungen gar keine Voraussetzungen.

In Übereinstimmung mit der in § 7 gegebenen Lommelschen Fundamentalformel betrachten wir hier die Funktion

$$(2) \qquad f^{\nu}(x) = F_1^{\nu} F_2^{\nu-1}(x) - F_1^{\nu-1}(x) F_2^{\nu}(x),$$

welche, wie (1) unmittelbar zeigt, ungeändert bleibt, wenn man $\nu + 1$ für ν einführt, so daß $f^{\nu}(x)$ *eine periodische Funktion in* ν *mit der additiven Periode* $+1$ *sein muß.*

Diese Bemerkung reicht aber für die vollständige Auflösung der Differenzengleichung (1) aus; bezeichnet man nämlich die allgemeinste Lösung dieser Gleichung mit $F(x)$ und setzt man noch

$$(3) \qquad J^{\nu+1}(x)F^{\nu}(x) - J^{\nu}(x)F^{\nu+1}(x) = \frac{2}{\pi x} b^{\nu}(x), \quad b^{\nu+1}(x) = b^{\nu}(x)$$

$$(4) \qquad -Y^{\nu+1}(x)F^{\nu}(x) + Y^{\nu}(x)F^{\nu+1}(x) = \frac{2}{\pi x} a^{\nu}(x), \quad a^{\nu+1}(x) = a^{\nu}(x),$$

so gibt die Lommelsche Fundamentalformel unmittelbar den Satz:

Die allgemeinste Lösung von (1), *über welche wir nur voraussetzen, daß die drei in* (1) *vorkommenden Funktionswerte wirklich existieren, läßt sich immer, wie folgt, darstellen:*

$$(5) \qquad F^{\nu}(x) = a^{\nu}(x)J^{\nu}(x) + b^{\nu}(x)Y^{\nu}(x); \; a^{\nu+1}(x) = a^{\nu}(x), \; b^{\nu+1}(x) = b^{\nu}(x).$$

Die sonst willkürlichen Funktionen a *und* b *lassen sich bestimmen, wenn man den Wert der Funktion* $F^{\nu}(x)$ *für* $\Re(\nu) = \pm\infty$ *kennt.*

Mit Hilfe dieses Satzes ist es aber sehr leicht, die allgemeinste Cylinderfunktion zu bestimmen; man muß nämlich nur so über die willkürlichen Funktionen $a^{\nu}(x)$ und $b^{\nu}(x)$ verfügen, daß $F^{\nu}(x)$ auch der ersten Funktionalgleichung der Cylinderfunktionen genügt. Eine direkte Einsetzung gibt:

$$F^{\nu-1}(x) - F^{\nu+1}(x) = 2D_x F^{\nu}(x) - 2J^{\nu}(x)D_x a^{\nu}(x) - 2Y^{\nu}(x)D_x b^{\nu}(x),$$

so daß man identisch

$$J^{\nu}(x)D_x a^{\nu}(x) + Y^{\nu}(x)D_x b^{\nu}(x) = 0$$

hat. Wenn nun die beiden Funktionen a und b von x *nicht unabhängig* sind, so läßt sich diese Bedingung auch so schreiben:

$$\frac{J^\nu(x)}{Y^\nu(x)} = -\frac{D_x b^\nu(x)}{D_x a^\nu(x)},$$

so daß der Bruch linker Hand eine in ν periodische Funktion darstellen müßte; dies ist aber unmöglich, denn die Lommelsche Fundamentalformel gibt:

$$\frac{J^\nu(x)}{Y^\nu(x)} = \frac{J^{\nu-1}(x)}{Y^{\nu-1}(x)} + \frac{2}{2\pi x Y^\nu(x) Y^{\nu-1}(x)};$$

also müssen die beiden Funktionen a und b von x unabhängig sein; damit haben wir folgenden zweiten Satz bewiesen:

Die allgemeine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν läßt sich immer, wie folgt, darstellen:

$$C^\nu(x) = a(\nu) J^\nu(x) + b(\nu) Y^\nu(x); \quad a(\nu+1) = a(\nu), \quad b(\nu+1) = b(\nu),$$

wo a und b von x unabhängig sind. Diese Cylinderfunktion ist also eine in x analytische Funktion, die zwei singulären Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen.

Es ist also einleuchtend, daß diese allgemeine Cylinderfunktion kein besonderes funktionentheoretisches Interesse darbietet, weil sie bekannt ist, sobald man nur zwei linear unabhängige Cylinderfunktionen gefunden hat. Für eine systematische Theorie ist diese allgemeine Cylinderfunktion $C^\nu(x)$ indessen von großem Nutzen, weil man durch sie diejenigen Formeln, welche für alle Cylinderfunktionen gelten, auf einmal allgemeingültig herleiten kann, statt diese Formeln zuerst für J und dann noch einmal für Y zu beweisen, wie die früheren Autoren es häufig gemacht haben. Beweist man dagegen die Formeln für $C^\nu(x)$, so ist offenbar, daß sie sowohl für Y als auch für J gelten müssen.

Wir haben also in diesem Paragraphen die allgemeine Lösung der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen gegeben; was die erste Fundamentalgleichung für diese Funktionen betrifft, so ist sie viel schwieriger; ja, man darf wohl sagen, daß es beinahe unmöglich scheint, die *allgemeine* Form der Lösungen dieser Gleichung zu finden. In der Tat findet man im nächsten Kapitel sowohl rationale Funktionen wie ganze transcendente Funktionen, die sämtlich Lösungen darstellen, und zudem geben wir noch im Kapitel XXIV sehr allgemeine Integraldarstellungen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen.

§ 10. Differentialeigenschaften der Cylinderfunktionen.

Als erste Anwendung der allgemeinen Cylinderfunktion wollen wir einige Differentialeigenschaften derselben herleiten. Wir haben

schon in § 1 darauf aufmerksam gemacht, daß die zwei Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen durch die zwei anderen ersetzt werden können:

$$(1)\quad D_x C^\nu(x) = -\frac{\nu}{x} C^\nu(x) + C^{\nu-1}(x),\ D_x C^\nu(x) = \frac{\nu}{x} C^\nu(x) - C^{\nu+1}(x);$$

von diesen Formeln ausgehend, findet man nun ohne Mühe folgende zwei anderen:

$$(2)\qquad D_x(x^\nu\ C^\nu(\alpha x)) = \alpha x^\nu C^{\nu-1}(\alpha x),$$

$$(3)\qquad D_x(x^{-\nu} C^\nu(\alpha x)) = -\alpha x^{-\nu} C^{\nu+1}(\alpha x),$$

welche wir schon in § 1 für die Besselsche Cylinderfunktion hergeleitet haben.

Die Formeln (1) geben noch die weiteren:

$$(4)\qquad D_x\left(x^{\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{\alpha x})\right) = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \cdot x^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot C^{\nu-1}(\sqrt{\alpha x}),$$

$$(5)\qquad D_x\left(x^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{\alpha x})\right) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \cdot x^{-\frac{\nu+1}{2}} \cdot C^{\nu+1}(\sqrt{\alpha x}),$$

welche viel eigentümlicher als die vorhergehenden sind. Setzt man nämlich:

$$f^\nu(x) = (4x)^{\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{x}),\quad g^\nu(x) = \sin \nu\pi \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{x}),$$

so findet man aus (4) und (5) folgende merkwürdige Formeln:

$$(6)\qquad D_x f^\nu(x) = f^{\nu-1}(x),\quad D_x g^\nu(x) = g^{\nu+1}(x),$$

von welchen die erste auch die Bernoullischen Funktionen[1]) als Lösungen hat.

Bemerkt man nun weiter, daß sich $C^\nu(x)$ in der ganzen x-Ebene, mit Ausnahme der zwei singulären Stellen $x = 0$ und $x = \infty$, regulär verhält, so geben die Formeln (4) und (5) die zwei Taylorschen Reihenentwicklungen:

$$(7)\qquad (\sqrt{x+h})^\nu C^\nu(\sqrt{x+h}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{h^s x^{\frac{\nu-s}{2}}}{s!\,2^s} C^{\nu-s}(\sqrt{x}),$$

$$(8)\qquad (\sqrt{x+h})^{-\nu} C^\nu(\sqrt{x+h}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s h^s}{s!\,2^s} \cdot \frac{C^{\nu+s}(\sqrt{x})}{x^{\frac{\nu+s}{2}}},$$

die anwendbar sind, falls $|h| < |x|$ und $0 < |x|$ vorausgesetzt wird.

---

1) Man vergleiche zum Beispiel die Inauguraldissertation von Renfer; Bern 1900, p. 37.

Wenn die Cylinderfunktion von der ersten Art ist, so können diese Bedingungen für (8) weggelassen werden, weil dann die Funktion linker Hand in dieser Formel eine ganze transcendente Funktion in x darstellen muß.

Unter Weglassung der Integrationskonstante findet man aus (2) und (3):

$$(9) \qquad \int x^\nu C^{\nu-1}(x)dx = x^\nu C^\nu(x), \quad \int x^{-\nu} C^{\nu+1}(x) = -x^{-\nu} C^\nu(x),$$

während (4) und (5) auf dieselbe Weise ergeben:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\int x^{\frac{\nu-1}{2}} C^{\nu-1}(\sqrt{x})dx = 2x^{\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{x}), \\ &\int x^{-\frac{\nu+1}{2}} C^{\nu+1}(\sqrt{x}) = -2x^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Die Formel (4), in welcher ν eine positive ganze Zahl bedeutet, während die Cylinderfunktion von der ersten Art ist, hat schon Bessel[1]) gekannt; Neumann[2]) hat dieselbe Formel auch für die Y-Funktion gegeben und eben dadurch den expliciten Ausdruck für diese Funktion gefunden. Bei Lommel findet man für die J-Funktion alle vier Differentialformeln[3]) und die Taylorsche Reihe (8)[4]).

§ 11. Reduktionsformel für $C^{\nu\pm n}(x)$. Bestimmung von $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$.

Der Ausdruck § 9, (5) für die allgemeine Lösung der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen erlaubt uns, für diese Funktionen eine Analogie der Lommelschen Fundamentalformel zu bilden. Es seien:

$$F_1^\nu(x) = a_1^\nu(x)J^\nu(x) + b_1^\nu(x)Y^\nu(x), \quad F_2^\nu(x) = a_2^\nu(x)J^\nu(x) + b_2^\nu(x)Y^\nu(x)$$

zwei solche Funktionen, so gibt die Regel für die Multiplikation zweier Determinanten die Formel:

$$\begin{vmatrix} F_1^{\nu+n}(x) & F_1^\nu(x) \\ F_2^{\nu+n}(x) & F_2^\nu(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^\nu(x) & a_2^\nu(x) \\ b_1^\nu(x) & b_2^\nu(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} J^{\nu+n}(x) & J^\nu(x) \\ Y^{\nu+n}(x) & Y^\nu(x) \end{vmatrix},$$

so daß die allgemeine Lommelsche Formel unmittelbar die andere ergibt:

$$(1) \qquad F_1^{\nu+n}(x)F_2^\nu(x) - F_1^\nu(x)F_2^{\nu+n}(x) = \frac{2}{x} \cdot \Delta \cdot R^{\nu,n-1}(x),$$

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 34.

2) Theorie der Besselschen Funktionen p. 54; 1867.

3) Studien über die Besselschen Funktionen, p. 6—9; 1868.

4) loc. cit. p. 11.

wo Δ die erste Determinante rechter Hand in der vorigen Gleichung bedeutet. Wenn a und b von x unabhängig sind, werden F_1 und F_2 gewöhnliche Cylinderfunktionen, und somit haben wir in (1) die zugehörige allgemeine Lommelsche Fundamentalformel gegeben.

Von der Formel (1) ausgehend, haben wir nun einige sehr wichtige Reduktionsformeln für die F-Funktionen und somit auch für die allgemeinen Cylinderfunktionen herzuleiten. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Fundamentalgleichung folgendermaßen:

$$F^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} F^{\nu}(x) - F^{\nu-1}(x); \tag{2}$$

setzen wir hier $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\nu + 3$, $\cdots$ statt ν, so ist offenbar daß wir dadurch eine allgemeine Formel von folgender Gestalt finden müssen:

$$F^{\nu+n}(x) = A^{\nu,n}(x) F^{\nu}(x) - B^{\nu,n}(x) F^{\nu-1}(x), \tag{3}$$

wo A und B rationale Funktionen der zwei Variabeln ν und x bedeuten; n ist natürlich eine positive ganze Zahl.

Man kann diese Funktionen A und B durch vollständige Induktion bestimmen, wie Lommel[1]) es wirklich getan hat; die folgende Methode ist aber viel einfacher.

Führt man nämlich in (1) den Ausdruck (3) ein, so findet man unmittelbar:

$$B^{\nu,n}(x) = R^{\nu,n-1}(x);$$

setzt man nun weiter in (1) $\nu - 1$ für ν und $n + 1$ für n, so liefert eine neue Anwendung von (3) das weitere Resultat:

$$A^{\nu,n}(x) = R^{\nu-1,n}(x),$$

und somit haben wir folgende allgemeine Reduktionsformel gefunden:

$$F^{\nu+n}(x) = R^{\nu-1,n}(x) F^{\nu}(x) - R^{\nu,n-1}(x) F^{\nu-1}(x). \tag{4}$$

Um die ähnliche Formel für den Parameter $\nu - n$ zu finden, setzen wir in (4) $\cos \nu\pi F^{-\nu}(x)$ statt $F^{\nu}(x)$, was offenbar erlaubt ist, weil auch diese Funktion eine Lösung der Fundamentalgleichung (2) sein muß. Unterdrückt man nun in der so erhaltenen Formel (4) den gemeinsamen Faktor $\cos \nu\pi$ und setzt man noch $1 - \nu$ statt ν, so findet man die erwähnte Formel:

$$(-1)^{n-1} F^{\nu-n}(x) = R^{1-\nu,n-2}(x) F^{\nu}(x) + R^{-\nu,n-1}(x) F^{\nu-1}(x); \tag{5}$$

man kann auch in der so modifizierten Formel (4) $-\nu$ für ν einführen, wodurch man folgende Formel findet:

1) Studien über die Besselschen Funktionen p. 3; 1868.

$$(6)\qquad (-1)^n F^{\nu-n}(x) = R^{-\nu-1,n}(x) F^{\nu}(x) + R^{-\nu,n-1}(x) F^{\nu+1}(x),$$

oder auch, wenn man $\nu + n$ für ν einsetzt,

$$(7)\qquad (-1)^n F^{\nu}(x) = R^{-\nu-n-1,n}(x) F^{\nu+n}(x) + R^{-\nu-n,n-1}(x) F^{\nu+n+1}(x);$$

die letztere Formel wird uns in den Untersuchungen über die Nullstellen einer Cylinderfunktion sehr nützlich sein.

Im allgemeinen haben wir durch die Formeln (4) und (5) den Satz bewiesen:

Um die Funktionen $F^{\nu}(x)$ in der ganzen ν-Ebene zu kennen, braucht man nur diejenigen Werte zu kennen, für welche $-1 < \Re(\nu) < +1$ ist.

Die Formel (4) ist für die J-Funktion von Lommel explicite gefunden, während Bessel[1]) sie schon für $\nu = 1$ gekannt hat; doch gibt er nicht die direkten Ausdrücke der Funktionen R, sondern definiert sie als Zähler und Nenner der Annäherungsbrüche des Kettenbruches, den wir in § 14 näher zu betrachten haben. Für $\nu = 1$ hat Christoffel[2]) den entwickelten Ausdruck für die R-Funktionen gefunden.

Es ist offenbar, daß die allgemeinen Formeln (4) und (5) uns erlauben, die Cylinderfunktionen zu bestimmen, deren Parameter die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist. Setzt man nämlich in (4) $\nu = \frac{1}{2}$, so findet man mittelst § 2, (2) die folgende erste Formel:

$$(8)\qquad J^{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n Y^{-n-\frac{1}{2}}(x) = A^n(x)\sin x - B^n(x)\cos x,$$

während (5) für $\nu = \frac{1}{2}$ und $n+1$ statt n die analoge Formel gibt:

$$(9)\qquad (-1)^n J^{-n-\frac{1}{2}}(x) = -Y^{n+\frac{1}{2}}(x) = A^n(x)\cos x + B^n(x)\sin x,$$

wo sich die Koeffizienten A und B mittelst der Formel (Γ_4) folgendermaßen darstellen lassen:

$$(10)\qquad A^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot R^{-\frac{1}{2},n}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{<\frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^s(2n-2s)!}{(2s)!(n-2s)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-2s+\frac{1}{2}},$$

$$(11)\qquad B^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot R^{\frac{1}{2},n-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{<\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(2n-2s-1)!}{(2s+1)!(n-2s-1)!}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-2s-\frac{1}{2}}.$$

Für die H-Funktionen findet man nun ohne Mühe aus (8) und (9) die Ausdrücke:

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 32.

2) Journal für Mathematik Bd. 58, p. 90—92; 1861.

$$(12) \qquad H_1^{n+\frac{1}{2}}(x) = -e^{ix}\left(B^n(x) + iA^n(x)\right),$$
$$H_2^{n+\frac{1}{2}}(x) = -e^{-ix}\left(B^n(x) - iA^n(x)\right);$$

aus denselben Formeln findet man noch die interessante Identität:

$$(13) \qquad \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2 + \left(Y^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2 = \left(A^n(x)\right)^2 + \left(B^n(x)\right)^2,$$

die zuerst von Lommel[1]) angegeben worden ist. Die Quadratsumme linker Hand in (13) ist also, vom Divisor π abgesehen, eine rationale Funktion in x, die zudem rationale Koeffizienten hat.

Die Cylinderfunktionen (8) und (9), die übrigens von Poisson[2]) eingeführt sind, lassen sich auch als Differentialquotienten von trigonometrischen Funktionen darstellen; die allgemeine Formel § 10, (5) gibt nämlich unmittelbar die beiden Ausdrücke:

$$(14) \qquad \begin{aligned} J^{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot D^n_{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right), \\ Y^{n+\frac{1}{2}}(x) &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2x)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot D^n_{x^2}\left(\frac{\cos x}{x}\right); \end{aligned}$$

man hat für dieselben Formeln auch direkte Beweise mittelst der zugehörigen Besselschen Differentialgleichung; der einfachste unter diesen ist neuerdings vom Kriegsminister Madsen[3]) gegeben worden.

Wendet man dagegen die allgemeine Formel § 10, (4) an, so lassen sich die Poissonschen Cylinderfunktionen durch mehrfache Integrale aus trigonometrischen Funktionen darstellen; eine noch allgemeinere Formel dieser Art ist schon von Liouville[4]) gefunden worden.

§ 12. Fundamentaleigenschaften des Lommelschen Polynomes.

Die Lommelsche Fundamentalformel und die Rekursionsformeln des vorigen Paragraphen zeigen deutlich, daß das Polynom R in der Theorie der Cylinderfunktionen eine sehr wichtige Rolle spielt. Dies hat schon Lommel richtig erkannt, indem er eine Reihe von Fundamentaleigenschaften dieses Polynomes entwickelt hat, die denen der Cylinderfunktionen ganz analog sind. Später haben Graf und

---

1) Mathematische Annalen Bd. 2, p. 631; 1870.

2) Journal de l'École Polytechnique cahier 19, p. 300; 1823. Théorie mathematique de la chaleur, Chap. VI; Paris 1835.

3) Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 13 B, p. 22; 1902.

4) Journal de l'École Polytechnique, cahier 24, p. 58; 1835.

Crelier die Lommelschen Formeln wiedergefunden und außerdem neue Eigenschaften des Polynomes R entdeckt.

Hier wollen wir die wichtigsten dieser Eigenschaften nebst einigen anderen mit Zuhilfenahme der Reduktionsformeln des § 11 herleiten.

Wir gehen also von der Formel § 11, (1):

$$(1)\qquad F_1^{\nu+n}(x)F_2^{\nu}(x) - F_1^{\nu}(x)F_2^{\nu+n}(x) = \frac{2}{\pi x}\cdot\Delta\cdot R^{\nu,n-1}(x)$$

aus; nehmen wir noch aus § 11, (5) die beiden Funktionen $F_1^{\nu-n}(x)$, $F_2^{\nu-n}(x)$, so finden wir folgende mit (1) analoge Formel:

$$(2)\qquad F_1^{\nu-n}(x)F_2^{\nu}(x) - F_1^{\nu}(x)F_2^{\nu-n}(x) = (-1)^n\frac{2}{\pi x}\cdot\Delta\cdot R^{-\nu,n-1}(x).$$

Nun ist es offenbar, daß (2) sich aus (1) bilden läßt, wenn man nur $\nu - n$ für ν einsetzt; man findet alsdann:

$$(3)\qquad R^{\nu-n,n-1}(x) = (-1)^{n-1}R^{-\nu,n-1}(x),$$

eine Formel, welche sich auch mittelst der Definition für R § 7, (2) direkt beweisen läßt. Es ist übrigens offenbar, daß (2) sich auch aus (1) herleiten läßt, wenn man das Zeichen von n ändert; man findet so folgende andere Formel:

$$(4)\qquad R^{\nu,-n-1}(x) = (-1)^n R^{-\nu,n-1}(x) = -R^{\nu-n,n-1}(x),$$

die von Graf[1]) herrührt.

Die Formel (4) *gilt als Definition der Funktion* R, *für welche der letzte Index negativ ist.*

Bedeutet nun weiter p eine ganze Zahl, und setzt man in (1) $\nu + p$ für ν und gleichzeitig $n - p$ für n, so findet man:

$$(5)\qquad F_1^{\nu+n}(x)F_2^{\nu+p}(x) - F_1^{\nu+p}(x)F_2^{\nu+n} = \frac{2}{\pi x}\cdot\Delta\cdot R^{\nu+p,n-p-1}(x),$$

denn die Determinante Δ ist ja in ν eine periodische Funktion. Drückt man nun wieder jede der vier F-Funktionen linker Hand in (5) mittelst der allgemeinen Reduktionsformel § 11, (4) aus, so findet man unter Anwendung von (1):

$$(6)\qquad R^{\nu,n-1}(x)R^{\nu-1,p}(x) - R^{\nu,p-1}(x)R^{\nu-1,n}(x) = R^{\nu+p,n-p-1}(x),$$

woraus man durch die Annahme $n = p + 1$ die merkwürdige Formel findet:

---

1) Annali di Matematica (2) Bd. 23, p. 56; 1895.

$$R^{\nu,p}(x)R^{\nu-1,p}(x) - R^{\nu,p-1}(x)R^{\nu-1,p+1}(x) = 1, \tag{7}$$

die, ebenso wie (6), von Lommel[1]) gefunden worden ist.

Die Formel (6) ist offenbar in der Theorie der R-Funktionen sehr fundamental; in der Tat kann man durch sie eine große Menge anderer herleiten. Erstens findet man zum Beispiel ohne Mühe folgende noch allgemeinere:

$$\begin{cases} R^{\nu,n}(x)R^{\nu+p+1,r-p-1}(x) - R^{\nu,r}(x)R^{\nu+p+1,n-p-1}(x) = \\ \qquad = R^{\nu,p}(x)R^{\nu+n+1,r-n-1}(x), \end{cases} \tag{8}$$

die von Crelier[2]) gefunden worden ist; zweitens gibt (6) für $p = 1$ die elegante Formel:

$$R^{\nu-1,n}(x) + R^{\nu+1,n-2}(x) = \frac{2\nu}{x} R^{\nu,n-1}(x), \tag{9}$$

während drittens die Hypothese $n = 1$, wenn man noch $\nu - p$ für ν schreibt, gibt:

$$R^{\nu-p-1,p}(x) - R^{\nu,-p}(x) = \frac{2(\nu-p)}{x} R^{\nu-p,p-1}(x);$$

setzt man in dieser Formel noch $-\nu$ für ν und $p+1$ für p, so findet man mittelst (3) und (4) die weitere elegante Formel:

$$R^{\nu,p-1}(x) + R^{\nu,p+1}(x) = \frac{2(\nu+p+1)}{x} R^{\nu,p}(x); \tag{10}$$

(9) und (10) sind ebenfalls von Lommel[3]) gefunden worden.

Mit Zuhilfenahme der zwei letzten Lommelschen Formeln beweist man nun auch ohne Schwierigkeit die andere:

$$\begin{cases} R^{\nu-1,n}(x) + R^{\nu+1,n}(x) = \\ \qquad = \frac{4\nu(\nu+n+1)}{x^2} R^{\nu,n}(x) - R^{\nu+1,n-2}(x) - R^{\nu-1,n+2}(x); \end{cases} \tag{11}$$

in der Tat braucht man nur mittelst (9) die zwei Funktionen linker Hand auszudrücken und dann wieder die Formel (10) anzuwenden.

Die Analogie zwischen den Formeln von (9) bis (11) und der zweiten Fundamentalformel der Cylinderfunktionen ist offenbar. Die Ursache dieser Analogie ist in der folgenden Grenzformel zu suchen:

$$\lim_{n=+\infty} \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+n-1}}{\Gamma(\nu+n)} R^{\nu-1,n}(x) \right) = J^{\nu-1}(x), \tag{12}$$

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 4, p. 115; 1871.

2) Annali di Matematica (2) Bd. 24, p. 141; 1896.

3) loc. cit. p. 114.

welche zuerst von Hurwitz[1]) gegeben worden ist; wir kehren später in § 62 zur Formel (12) zurück.

Aus der Formel (10) ergibt sich ohne Mühe, daß die Funktion

$$F^n(x) = R^{k-1,n-k}(x) \tag{13}$$

der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen mit dem Parameter n genügt, vorausgesetzt, daß k eine ganze Zahl bedeutet; diese Funktion (13) läßt sich also vermöge § 9, (5) folgendermaßen darstellen:

$$R^{k-1,n-k}(x) = a(x)J^n(x) + b(x)Y^n(x), \tag{14}$$

wo $a(x)$ und $b(x)$ von n unabhängig sein müssen; setzt man in der Tat

$$a(x) = \frac{\pi x}{2} Y^{k-1}(x), \quad b(x) = -\frac{\pi x}{2} J^{k-1}(x),$$

so zeigt die Lommelsche Fundamentalformel unmittelbar die Richtigkeit von (14).

§ 13. Differentialeigenschaften des Lommelschen Polynomes.

Die Analogie zwischen den Cylinderfunktionen und den rationalen Funktionen $R^{\nu,n}(x)$ läßt sich auch auf die Differentialeigenschaften übertragen. Um dies zu beweisen, brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

Bedeuten in der Formel

$$\sum_{n=p}^{n=p'} f^{\nu+n}(x) J^{\nu+n}(x) = \sum_{m=q}^{m=q'} g^{\nu+m}(x) J^{\nu+m}(x) \tag{1}$$

p und p', q und q' endliche ganze Zahlen, und sind die Funktionen f und g sämtlich in x rational, während sie in ν willkürlich angenommen werden dürfen, so reduziert sich die Formel (1) auf folgende Identität mit den R-Funktionen:

$$\sum_{n=p}^{n=p'} f^{\nu+n}(x) R^{\nu-1,n}(x) = \sum_{m=q}^{m=q'} g^{\nu+m}(x) R^{\nu-1,m}(x) \tag{2}$$

und ist somit für jede willkürliche Lösung der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen anwendbar.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 33, p. 252; 1889.

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist sehr einfach; in der Tat läßt sich (1) mittelst der allgemeinen Rekursionsformeln (4) und (5) in § 11 folgendermaßen schreiben:

$$A(x) J^{\nu}(x) = B(x) J^{\nu-1}(x), \tag{3}$$

wo $A(x)$ und $B(x)$ in x rationale Funktionen bedeuten; nun beweisen wir später in Kapitel XI, daß die beiden transcendenten Gleichungen:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} J^{\nu}(x) = 0, \quad \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu-1} J^{\nu-1}(x) = 0$$

unendlich viele verschiedene Wurzeln haben, darunter aber keine gemeinsamen, so daß die Gleichung (3) dann und nur dann möglich sein kann, wenn sie sich in eine *formale* Identität verwandelt, wenn also $A(x)$ und $B(x)$ beide identisch gleich Null sind. Rechnet man nun wirklich mittelst der obenerwähnten Reduktionsformeln die Funktion $A(x)$ aus, so findet man die Gleichung (2), und somit ist der Satz bewiesen.

Differentiiert man nun nach x die Formel § 11, (4)

$$J^{\nu+n}(x) = R^{\nu-1,n}(x) J^{\nu}(x) - R^{\nu,n-1}(x) J^{\nu-1}(x),$$

so findet man mittelst der Differentiationsformeln (3) und (4) in § 1 folgende Formeln:

$$D_x R^{\nu-1,n}(x) = -\frac{n}{x} R^{\nu-1,n}(x) + R^{\nu-1,n-1}(x) - R^{\nu,n-1}(x), \tag{4}$$

$$D_x R^{\nu-1,n}(x) = \frac{2\nu+n}{x} R^{\nu-1,n}(x) - R^{\nu-1,n+1}(x) - R^{\nu,n-1}(x), \tag{5}$$

die beide von Lommel[1]) gefunden worden sind.

Eliminiert man nun aus (5) mittelst § 12, (9) die Funktion:

$$\frac{2\nu-2}{x} R^{\nu-1,n}(x)$$

und setzt man noch in (4) und in der so erhaltenen neuen Formel (5) $\nu+1$ für ν, so findet man für die R-Funktionen die weiteren Differentialformeln:

$$D_x R^{\nu,n}(x) = \frac{n+2}{x} R^{\nu,n}(x) + R^{\nu-1,n+1}(x) - R^{\nu,n+1}(x), \tag{6}$$

$$D_x R^{\nu,n}(x) = -\frac{n}{x} R^{\nu,n}(x) + R^{\nu,n-1}(x) - R^{\nu+1,n-1}(x), \tag{7}$$

welche sich noch in anderer Weise schreiben lassen. Setzt man

1) Mathematische Annalen, Bd. 4, p. 114; 1871.

nämlich in (7) $\nu - 1$ für ν und $n + 2$ für n, so findet man durch Anwendung von (6):

$$(8)\qquad D_x\left(R^{\nu,n}(x) - R^{\nu-1,n+2}(x)\right) = \frac{n+2}{x}\left(R^{\nu,n}(x) + R^{\nu-1,n+2}(x)\right);$$

setzt man in dieser Formel noch $\nu + 1$ statt ν und $n - 2$ statt n, so läßt sich dieselbe auch folgendermaßen schreiben:

$$(9)\qquad D_x\left(R^{\nu,n}(x) - R^{\nu+1,n-2}(x)\right) = -\frac{n}{x}\left(R^{\nu,n}(x) + R^{\nu+1,n-2}(x)\right).$$

Setzt man nun wieder in dieser Formel $\nu + 1$ statt ν, $n - 2$ statt n und fährt man so fort, bis man, je nachdem n gerade oder ungerade ist, eine R-Funktion mit dem letzten Index 0 oder -1 erreicht, die ja beide von x unabhängig sind, so gibt eine Addition aller so erhaltenen Gleichungen durch Anwendung von (7) folgende Rekursionsformel:

$$(10)\qquad R^{\nu+1,n-1}(x) - R^{\nu,n-1}(x) = \frac{2}{x}\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}(n - 2s + 1)R^{\nu+s,n-2s}(x).$$

Indem wir uns übrigens vorbehalten, in den §§ 26, 106 andere und bequemere Rekursionsformeln für die R-Funktionen zu geben, bemerken wir hier noch, daß die Definition § 7, (2) mittelst der Elemente der Differenzenrechnung folgende Formel liefert:

$$(11)\qquad \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s}{s!\,(n-s)!}\,R^{\nu+n-s,n}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^n.$$

§ 14. Kettenbruchentwicklungen und ähnliche Darstellungen.

Nachdem wir das Lommelsche Polynom untersucht haben, ist es sehr leicht, eine Kettenbruchentwicklung der allgemeinen Lösung der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen zu diskutieren.

Zu diesem Zwecke schreiben wir die obenerwähnte Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{F^{\nu-1}(x)}{F^{\nu}(x)} = \frac{2\nu}{x} - \frac{1}{\left(\dfrac{F^{\nu}(x)}{F^{\nu+1}(x)}\right)};$$

durch Wiederholung dieses Prozesses findet man ohne Mühe den folgenden Kettenbruch:

$$(1)\quad \frac{F^{\nu-1}(x)}{F^{\nu}(x)} = \frac{2\nu}{x} - \cfrac{1}{\frac{2(\nu+1)}{x} - \cfrac{1}{\frac{2(\nu+2)}{x} - \cdots - \cfrac{1}{\frac{2(\nu+n)}{x} - R_n}}},$$

wo wir der Kürze halber

$$R_n = \frac{F^{\nu+n+1}(x)}{F^{\nu+n}(x)}$$

gesetzt haben; wir haben somit eine neue Eigenschaft für die allgemeine Lösung der obenerwähnten Fundamentalgleichung gefunden, während man sonst im allgemeinen nur für die Besselsche Cylinderfunktion eine solche Eigenschaft bemerkt zu haben scheint.

Sucht man nun die Bedingung dafür, daß der Kettenbruch (1) unbegrenzt fortgesetzt werden darf, so ist offenbar, daß

$$\lim_{n=+\infty} R_n = 0$$

sein muß, eine Bedingung, die sowohl notwendig als hinreichend ist. Nun zeigt aber die Form der allgemeinen Lösung § 9, (5) in Verbindung mit den asymptotischen Ausdrücken § 2, (3) und § 3, (8), daß diese Bedingung nur für die Besselsche Cylinderfunktion erfüllt werden kann, und somit haben wir die altbekannte Formel:

$$(2)\quad \frac{J^{\nu-1}(x)}{J^{\nu}(x)} = \frac{2\nu}{x} - \cfrac{1}{\frac{2(\nu+1)}{x} - \cfrac{1}{\frac{2(\nu+2)}{x} - \cdots}}$$

in aller Strenge bewiesen.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Zähler $Y_r^{\nu-1}$ und Nenner $Z_r^{\nu-1}$ der Annäherungsbrüche in (1) oder (2) Lommelsche Polynome sein müssen. Bildet man nämlich diese Annäherungsbrüche, so bekommt man direkt:

$$Z_r^{\nu-1} = Y_{r-1}^{\nu}, \quad Z_0^{\nu-1} = 1,$$

während die Definition selbst für die Annäherungsbrüche folgende Rekursionsformel ergibt:

$$\frac{Y_r^{\nu-1}}{Y_{r-1}^{\nu}} = \frac{2\nu}{x} - \frac{Y_{r-2}^{\nu+1}}{Y_{r-1}^{\nu}}$$

oder, was dasselbe ist,

$$Y_r^{\nu-1} + Y_{r-2}^{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} Y_{r-1}^{\nu}, \quad r \geq 2,$$

während man außerdem noch findet:

$$Y_0^{\nu-1} = R^{\nu-1,0}(x), \quad Y_1^{\nu-1} = R^{\nu-1,1}(x),$$

so daß man unmittelbar aus § 12, (9) folgende Formel erhält:

(3) $$Y_r^{\nu-1} = R^{\nu-1,r}(x).$$

Die zweite Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen läßt sich indessen auch folgendermaßen darstellen:

(4) $$\frac{F^{\nu+2}(x)}{F^{\nu}(x)} = -1 + \frac{2(\nu+1)}{x} \cdot \frac{F^{\nu+1}(x)}{F^{\nu}(x)},$$

so daß der Bruch linker Hand mittels (1) und (2) in einen Kettenbruch entwickelt werden kann; man findet so die zweite Kettenbruchentwicklung, die Lommel[1]) angegeben hat.

Sicher hat Lambert[2]) zum ersten Male in seinen Untersuchungen über die Irrationalität von π einen Kettenbruch von der Form (2) und zwar den Spezialfall $\nu = \frac{1}{2}$, $x = i$ gebraucht; später hat Legendre[3]) den allgemeinen Kettenbruch (2) betrachtet. Indessen hat zuerst Bessel[4]) erkannt, daß der obenerwähnte Kettenbruch für ganze ν in Verbindung mit $J^\nu(x)$ steht; mit der Definition (3) für die R-Funktionen hat Bessel auch seinen Spezialfall der allgemeinen Reduktionsformel § 11, (4) gegeben.

Die Formel § 9, (2):

$$F^\nu(x)F_1^{\nu-1}(x) - F^{\nu-1}(x)F_1^\nu(x) = f^\nu(x),$$

wo F und F_1 zwei verschiedene Lösungen der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen bedeuten, läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

(5) $$\frac{F_1^{\nu-1}(x)}{F^{\nu-1}(x)} = \frac{F_1^\nu(x)}{F^\nu(x)} + \frac{f^\nu(x)}{F^{\nu-1}(x)F^\nu(x)};$$

beachtet man nun, daß $f^\nu(x)$ in ν periodisch ist, so findet man ohne Schwierigkeit folgende zwei allgemeinen Formeln, in denen n eine positive ganze Zahl bedeutet:

(6) $$\frac{F_1^\nu(x)}{F^\nu(x)} = \frac{F_1^{\nu+n}(x)}{F^{\nu+n}(x)} + \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{f^\nu(x)}{F^{\nu+s}(x)F^{\nu+s+1}(x)},$$

(7) $$\frac{F_1^\nu(x)}{F^\nu(x)} = \frac{F_1^{\nu-n}(x)}{F^{\nu-n}(x)} - \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{f^\nu(x)}{F^{\nu-s}(x)F^{\nu-s-1}(x)}.$$

---

1) Studien über die Besselschen Funktionen p. 5; 1868.
2) Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 1761, p. 265.
3) Éléments de Géométrie p. 288. 11. Ausgabe, Paris 1817.
4) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 31—33.

Setzt man in (6) $\nu = 0$, $F = J$, $F_1 = Y$, so findet man eine Formel, die Sonin[1]) gegeben hat. Nimmt man für F eine passende Lösung der obenerwähnten Fundamentalgleichung, so darf man in (6) und (7) n unbegrenzt wachsen lassen.

§ 15. Die Funktion $D_\nu C^\nu(x)$ für ganze ν.

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir eine Reihe von Eigenschaften für die allgemeine Cylinderfunktion aufgestellt, sofern sie als Funktion des Argumentes x betrachtet wird. Betrachtet man dagegen den Parameter ν als die eigentliche Variable der Cylinderfunktion, so scheint sie eine viel schwierigere Funktion zu sein. Außer den zwei allgemeinen Reduktionsformeln (4) und (5) des § 11 haben wir in der Tat über diese Funktion nur einen einzigen neuen Satz hinzuzufügen und zwar einen Satz über die nach dem Parameter ν genommene Derivierte.

Zu diesem Zwecke setzen wir im allgemeinen:

$$D_\nu C^\nu(x) = \mathfrak{C}^\nu(x) + C^\nu(x) \log\left(\frac{x}{2}\right), \tag{1}$$

so daß die zu J gehörige Funktion $\mathfrak{J}^\nu(x)$ logarithmenfrei ist; aus dieser Definition (1) folgen für $\mathfrak{C}^\nu(x)$ unmittelbar folgende zwei Fundamentalgleichungen:

$$\mathfrak{C}^{\nu-1}(x) - \mathfrak{C}^{\nu+1}(x) = 2 D_x \mathfrak{C}^\nu(x) + \frac{2}{x} C^\nu(x), \tag{2}$$

$$\mathfrak{C}^{\nu-1}(x) + \mathfrak{C}^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \mathfrak{C}^\nu(x) + \frac{2}{x} C^\nu(x), \tag{3}$$

und daß dieselbe Funktion ein partikuläres Integral der nicht homogenen Differentialgleichung:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{2}{x} C^{\nu+1}(x) \tag{4}$$

sein muß.

Für die Funktion $\mathfrak{J}^\nu(x)$ haben wir früher den Ausdruck § 3, (14) gegeben:

$$\mathfrak{J}^\nu(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Psi(\nu+s+1)}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}; \tag{5}$$

weiter folgt aus der Formel (16) des § 3 die andere:

$$\mathfrak{J}^n(x) + (-1)^n \mathfrak{J}^{-n}(x) = -2J^n(x) \log\left(\frac{x}{2}\right) + \pi Y^n(x), \tag{6}$$

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 33; 1880.

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so daß eine besondere Untersuchung der Funktion $\mathfrak{J}^{-n}(x)$ überflüssig ist.

Um nun die zu $Y^\nu(x)$ gehörige Funktion $\mathfrak{Y}^\nu(x)$ zu finden, multiplizieren wir die Definition § 3, (2) für die Neumannsche Cylinderfunktion mit $\sin\nu\pi$, so daß eine Differentiation nach ν unmittelbar die Formel ergibt:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{Y}^\nu(x)\sin\nu\pi - \cos\nu\pi\,\mathfrak{J}^\nu(x) + \mathfrak{J}^{-\nu}(x) + 2J^{-\nu}(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) \\ \qquad = \pi J^\nu(x)\sin\nu\pi - \pi Y^\nu(x)\cos\nu\pi, \end{cases}$$

die jedoch für ganze ν keine direkte Bestimmung von $\mathfrak{Y}$ mehr gestattet. Setzt man indessen in (7) $-\nu$ für ν und drückt man das dabei eingeführte $Y^{-\nu}(x)$ mittels § 3, (4) aus, so findet man:

$$\mathfrak{Y}^\nu(x) + \mathfrak{Y}^{-\nu}(x)\cos\nu\pi = -2Y^\nu(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \pi\cos\nu\pi J^{-\nu}(x)$$

$$+\sin\nu\pi\left(\mathfrak{J}^{-\nu}(x) - \pi\cos\nu\pi\,Y^\nu(x) - \pi\sin\nu\pi J^\nu(x)\right),$$

woraus, falls n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, die mit (6) analoge Formel folgt:

$$(8)\qquad \mathfrak{Y}^n(x) + (-1)^n\mathfrak{Y}^{-n}(x) = -2Y^n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \pi J^n(x).$$

Die Formeln (6) und (8) geben nun für $n = 0$ unmittelbar die Ausdrücke:

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{J}^0(x) = -J^0(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}Y^0(x), \\ \mathfrak{Y}^0(x) = -Y^0(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}J^0(x); \end{cases}$$

für $n = 1$ muß man noch die Formel (3) für $\nu = 0$ zu Hilfe nehmen, so daß man in diesem Falle findet:

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{J}^1(x) = -J^1(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}Y^1(x) + \frac{1}{x}J^0(x), \\ \mathfrak{Y}^1(x) = -Y^1(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}J^1(x) + \frac{1}{x}Y^0(x). \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nunmehr zur allgemeinen Cylinderfunktion:

$$(11)\qquad C^\nu(x) = a(\nu)J^\nu(x) + b(\nu)Y^\nu(x),$$

wo also $a(\nu)$ und $b(\nu)$ differentiable Funktionen bedeuten müssen, und finden für die entsprechende $\mathfrak{C}$-Funktion den Ausdruck:

$$(12)\quad \mathfrak{C}^\nu(x) = a(\nu)\mathfrak{J}^\nu(x) + b(\nu)\mathfrak{Y}^\nu(x) + a^{(1)}(\nu)J^\nu(x) + b^{(1)}(\nu)Y^\nu(x),$$

so daß (9) und (10) unmittelbar ergeben:

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{C}^0(x) = -C^0(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) + C_1{}^0(x), \\ \mathfrak{C}^1(x) = -C^1(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}C^0(x) + C_1{}^1(x), \end{cases}$$

wo wir der Kürze halber gesetzt haben:

$$(14)\qquad C_1{}^n(x) = \left(a' - \frac{\pi}{2}b\right)J^n(x) + \left(b' + \frac{\pi}{2}a\right)Y^n(x),$$

wo wiederum a und b, a' und b' die von dem ganzzahligen Argumente n unabhängigen Werte von $a(\nu)$ und $b(\nu)$, $a^{(1)}(\nu)$ und $b^{(1)}(\nu)$ bedeuten, so daß $C_1{}^n(x)$ wieder eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter n bezeichnet.

Differentiieren wir nun die allgemeine Reduktionsformel § 11, (4) nach ν und setzen wir darauf $\nu = 1$ und $n - 1$ für n, so finden wir folgende allgemeine Formel:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{C}^n(x) = -C^n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{x}R^{0,n-1}(x)\,C^0(x) \\ \qquad + \mathfrak{R}^{0,n-1}(x)\,C^1(x) - \mathfrak{R}^{1,n-2}(x)\,C^0(x) + C_1{}^n(x), \end{cases}$$

wo

$$(D_\nu R^{\nu,p}(x))_{\nu=q} = \mathfrak{R}^{q,p}(x),$$

während die Formeln (6) und (8) unmittelbar ergeben:

$$(16)\qquad \mathfrak{C}^n(x) + (-1)^n\mathfrak{C}^{-n}(x) = -2C^n(x)\log\left(\frac{x}{2}\right) + 2C_1{}^n(x)$$

Wir haben somit den allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so läßt sich die Derivierte $\mathfrak{C}^n(x)$ immer unter endlicher Form mittels Cylinderfunktionen und der elementaren Funktionen darstellen.

Wir bemerken noch, daß die einfachste Lösung der Fundamentalgleichungen (2) und (3) sich so darstellen läßt:

$$(17)\qquad a(\nu)\mathfrak{J}^\nu(x) + b(\nu)\mathfrak{Y}^\nu(x),$$

so daß sie immer existiert, unabhängig von der Differentiierbarkeit der periodischen Funktionen $a(\nu)$ und $b(\nu)$.

§ 16. Andere Beweise der Lommelschen Fundamentalformel.

Wir haben schon in § 7 zwei verschiedene Beweise der Lommelschen Fundamentalformel:

$$(1)\qquad Y^{\nu-1}(x)J^\nu(x) - Y^\nu(x)J^{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

gegeben. Dieselbe Formel läßt sich indessen noch auf verschiedene

andere Weisen herleiten, die nicht ohne Interesse sind; wir wollen deshalb hier noch zwei andere Beweise für dieselbe Formel mitteilen.

Dritter Beweis. Wir haben § 9 im Anfang darauf aufmerksam gemacht, daß die Funktion linker Hand in (1) periodisch in ν sein muß; setzt man daher $\nu + n$ für ν, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet und läßt man n unbegrenzt wachsen, so führen die asymptotischen Ausdrücke § 2, (3) und § 3, (8) sehr leicht zur Bestimmung dieser periodischen Funktion, und somit ist auch (1) bewiesen.

Vierter Beweis. Multipliziert man die allgemeine Reduktionsformel:

$$Y^{\nu+n}(x) = R^{\nu-1,n}(x)\,Y^{\nu}(x) - R^{\nu,n-1}(x)\,Y^{\nu-1}(x)$$

mit

$$\frac{x^{\nu+n-1}}{\Gamma(\nu+n)\,2^{\nu+n-1}},$$

so braucht man nur die positive ganze Zahl n unbegrenzt wachsen zu lassen; die Formeln § 3, (8) und § 12, (12) führen dann unmittelbar zum Ziele.

Der Lommelsche Beweis. Lommel hat die obenerwähnte Formel dadurch gefunden, daß er das zweite partikuläre Integral der Besselschen Gleichung:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x}\,y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

durch die Substitution:

$$y = zJ^{\nu}(x)$$

zu bestimmen suchte. Die Bestimmung der unbekannten Funktion z wird nun dadurch ermittelt, daß sie folgender linearer Gleichung:

$$z^{(2)} + \left(\frac{1}{x} + \frac{2\,D_x J^{\nu}(x)}{J^{\nu}(x)}\right) z^{(1)} = 0$$

genügen muß; dieser Bemerkung entsprechend findet man dann für das partikuläre Integral unmittelbar den Ausdruck:

$$y = J^{\nu}(x)\int \frac{dx}{x\,(J^{\nu}(x))^2};$$

d. h. es ist möglich, über die von x unabhängige, willkürliche Integrationskonstante so zu verfügen, daß

$$J^{\nu}(x)\int \frac{dx}{x\,(J^{\nu}(x))^2} = b(\nu)\,Y^{\nu}(x)$$

wird.

Bemerkt man nun, daß für hinlänglich kleine Werte von $|x|$ die Funktion linker Hand eine Entwicklung von der Form:

$$-\,2^{\nu-1}\Gamma(\nu)x^{-\nu}(1 + a_1 x + \cdots)$$

gestattet, so bestimmt die Definition der Y-Funktion unmittelbar die unbekannte Funktion $b(\nu)$, so daß man endlich die Formel gewinnt:

$$J^\nu(x) \int \frac{dx}{x(J^\nu(x))^2} = \frac{\pi}{2} Y^\nu(x), \tag{2}$$

die von Lommel[1]) gefunden worden ist. Für $\nu = 0$ hat aber schon Euler[2]) die Funktion linker Hand als zweites partikuläres Integral der Besselschen Gleichung benutzt. Lommel hat nun weiter die Formel (1) durch $J^\nu(x)$ dividiert; eine Differentiation nach x gibt dann leicht die gesuchte Fundamentalformel. Dieser Beweis ist also nur eine kompliziertere Form des von Hankel und Weber gelieferten, den wir schon in § 7 mitgeteilt haben.

Kapitel III.

Elementare Integraldarstellungen und Verallgemeinerungen der Besselschen Cylinderfunktion.

§ 17. Erstes Integral von Bessel und die Funktionen $\Psi^\nu(x)$, $\Omega^\nu(x)$ und $T^n(x)$.

Die wohlbekannten Integralausdrücke für die Gammafunktion erlauben uns ohne Mühe eine Reihe von einfachen Integraldarstellungen für die Besselsche Cylinderfunktion herzuleiten; und ebendiese Integrale spielen in den Anwendungen eine so wichtige Rolle, daß es uns angemessen erscheint, diese Darstellungen hier zu diskutieren, obgleich wir später in Kapitel VII viel allgemeinere Integrale zu untersuchen haben.

Ehe wir zur wirklichen Herleitung der betreffenden Formeln schreiten, scheint es uns nützlich, einige allgemeine Formeln von Cauchy vorauszuschicken. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $f(\varphi)$ eine von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrierbare Funktion, welche außerdem der Bedingung genügt:

$$f(\pi - \varphi) = f(\varphi).$$

Wir führen nun folgende beiden in ν ganzen transcendenten Funktionen ein:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 4, p. 103; 1871.

2) Institutiones calculi integralis Bd. 2, p. 235; 1769.

$$(1) \qquad F(\nu) = \int_0^\pi f(\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi, \quad G(\nu) = \int_0^\pi f(\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi$$

und setzen

$$\int_0^\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi;$$

weiter transformieren wir diese zwei neuen Integrale, indem wir $\frac{\pi}{2} - \varphi$, bezw. $\frac{\pi}{2} + \varphi$ für φ setzen, und finden somit folgende zwei anderen Integraldarstellungen der Funktionen (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} F(\nu) = 2\cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi, \\ G(\nu) = 2\sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi. \end{cases}$$

Es sei nun wieder $g(\varphi)$ eine von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integrierbare Funktion, welche der Bedingung genügt:

$$g(\pi - \varphi) = -g(\varphi);$$

dann findet man auf ähnliche Weise für die Funktionen:

$$(3) \qquad \mathfrak{F}(\nu) = \int_0^\pi g(\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi, \quad \mathfrak{G}(\nu) = \int_0^\pi g(\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi$$

die zwei weiteren Formeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(\nu) = 2\sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi, \\ \mathfrak{G}(\nu) = -2\cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi. \end{cases}$$

Die neuen Integraldarstellungen unserer vier ganzen transcendenten Funktionen liefern nun ohne Mühe folgende bemerkenswerten Formeln:

$$(5) \qquad G(\nu) = \operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2}\cdot F(\nu); \quad \mathfrak{G}(\nu) = -\cot\frac{\nu\pi}{2}\cdot\mathfrak{F}(\nu),$$

die zuerst von Cauchy[1]) angegeben worden sind und zu denen wir in den §§ 73, 99 noch eigentümliche Analogien zu entwickeln haben. Bedeutet speziell n eine ganze Zahl, so findet man aus (2) und (4) die Werte:

$$F(2n+1) = \mathfrak{G}(2n+1) = 0, \quad G(2n) = \mathfrak{F}(2n) = 0. \tag{6}$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen liefern die Formeln (Γ_{21}) und (Γ_{22}), wenn wir in den beiden folgenden Integralen für $\cos(x \sin\varphi)$ und $\sin(x\sin\varphi)$ die gewöhnlichen Potenzreihen einsetzen und dann gliedweise integrieren, was offenbar erlaubt ist, folgende zwei Integraldarstellungen:

$$(7)\quad \begin{cases} J^{2n}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos(2n)\varphi\, d\varphi, \\ J^{2n+1}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

wo n eine ganze Zahl bedeuten muß. Die Integralausdrücke (7) lassen sich indessen auch auf eine gemeinsame Form bringen, indem wir sowohl für gerade wie für ungerade n folgende allgemeine Form herleiten können:

$$J^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi, \tag{8}$$

denn die Additionsformel für $\cos(x\sin\varphi - n\varphi)$ führt uns immer mittelst (6) auf (7) zurück, und wir haben somit das erste Integral von Bessel[2]) gefunden, das also nur anwendbar ist, falls n eine *ganze Zahl* bedeutet.

Wenn dagegen n *keine ganze Zahl* ist, so kann das Integral rechter Hand in (8) *niemals* eine Cylinderfunktion darstellen. Setzt man nämlich:

$$\Psi^\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - \nu\varphi)\, d\varphi, \tag{9}$$

so findet man die zwei Fundamentalgleichungen:

$$\Psi^{\nu-1}(x) - \Psi^{\nu+1}(x) = 2D_x\Psi^\nu(x) \tag{10}$$

$$\Psi^{\nu-1}(x) + \Psi^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\cdot\Psi^\nu(x) - \frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}, \tag{10a}$$

---

1) Comptes rendus Bd. 39, p. 131; 1854.

2) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 22.

die sich am einfachsten herleiten lassen, indem man die zweigliedrigen Ausdrücke linker Hand mittelst (9) als Integrale schreibt und dann für (10a) die partielle Integration anwendet. Die Formel (10a) fällt indessen mit der zweiten Fundamentalformel der Cylinderfunktionen dann und nur dann zusammen, wenn ν eine ganze Zahl bedeutet.

Benutzt man nun dieselbe Methode, die uns in § 1 zur Besselschen Differentialgleichung geführt hat, so findet man, daß die Ψ-Funktion ein partikuläres Integral der nicht homogenen Differentialgleichung:

$$(11) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}\, y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{\sin \nu\pi}{\pi x} - \frac{\nu \sin \nu\pi}{\pi x^2}$$

sein muß.

Sicher ist die Ψ-Funktion der erste Versuch, den man gemacht hat, um die J-Funktion mit ganzem Parameter zu verallgemeinern; sie ist zuerst von Poisson[1]) eingeführt worden, während später Anger[2]), Lommel[3]) und H. F. Weber-Zürich[4]) unabhängig voneinander dieselbe Funktion untersucht haben.

Es ist offenbar, daß $\Psi^\nu(x)$ eine ganze transcendente Funktion der zwei Variabeln x und ν ist; um ihre Potenzreihe in x zu bilden, ist es bequem, die zwei anderen Funktionen:

$$(12) \qquad \Pi^\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\Psi^\nu(x) + \Psi^{-\nu}(x)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\varphi) \cos(\nu\varphi)\, d\varphi,$$

$$(13) \qquad X^\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\Psi^\nu(x) - \Psi^{-\nu}(x)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x \sin\varphi) \sin(\nu\varphi)\, d\varphi$$

zu benutzen, so daß man mittelst der Formeln (2) auch:

$$(12a) \qquad \Pi^\nu(x) = \frac{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\, d\varphi,$$

$$(13a) \qquad X^\nu(x) = \frac{2\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\, d\varphi$$

---

1) Connaissances des temps 1833. Citat von Burkhardt: Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. 10, p. 101; 1901.

2) Neueste Schriften d. Naturf.-Gesellschaft Danzig Bd. 5, p. 14; 1855.

3) Mathematische Annalen Bd 16, p. 183; 1880.

4) Vierteljahrsschrift d. Naturf.-Gesellschaft Zürich Bd. 24, p. 46; 1879.

setzen kann; die Formel (Γ_{19}) liefert also folgende Potenzreihen:

(14) $$\Pi^\nu(x) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+1-\frac{\nu}{2}\right)},$$

(15) $$X^\nu(x) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)},$$

die unmittelbar zeigen:

Wenn ν eine ganze Zahl ist, so wird eine der Funktionen $\Pi^\nu(x)$ und $X^\nu(x)$ immer gleich Null, die andere mit der J-Funktion identisch.

Wir gewinnen auch leicht die folgenden Fundamentalformeln:

(16) $$\Pi^{\nu-1}(x)-\Pi^{\nu+1}(x)=2D_x X^\nu(x),\quad \Pi^{\nu-1}(x)+\Pi^{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}X^\nu(x)$$

(17) $$\begin{cases} X^{\nu-1}(x)-X^{\nu+1}(x)=2D_x\Pi^\nu(x),\\ X^{\nu-1}(x)+X^{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}\Pi^\nu(x)-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x},\end{cases}$$

während die Differentialgleichung (11) für Π, bezw. X ergibt:

(18) $$y^{(2)}+\frac{1}{x}y^{(1)}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=-\frac{\nu\sin\pi\nu}{\pi x^2}$$

(19) $$y^{(2)}+\frac{1}{x}y^{(1)}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=\frac{\sin\nu\pi}{\pi x}.$$

Es ist offenbar, daß die andere in x und ν ganze transcendente Funktion:

(20) $$\Omega^\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(x\sin\varphi-\nu\varphi)\,d\varphi,$$

die gleichzeitig von Lommel[1]) und H. F. Weber-Zürich[2]) eingeführt worden ist, mit der Ψ-Funktion sehr nahe zusammenhängen muß. Setzt man in (9) $-\nu$ für ν und darauf $\pi-\varphi$ für φ, so findet man in der Tat ohne Mühe die Formel:

(21) $$\Omega^\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left(\cos\nu\pi\cdot\Psi^\nu(x)-\Psi^{-\nu}(x)\right),$$

die also mit derjenigen ganz analog ist, welche von J nach Y führt. In dem speziellen Falle, in welchem ν eine ganze Zahl bedeutet, haben wir noch den Grenzwert rechter Hand in (21) zu bestimmen.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 187; 1880.

2) Vierteljahrsschrift d. Naturf.-Gesellschaft Zürich Bd. 24, p. 47; 1879.

Um dies durchführen zu können, bemerken wir, daß sich (21) auch folgendermaßen schreiben läßt:

(21a) $$\Omega^\nu(x) = \cot\frac{\nu\pi}{2}\,\mathrm{X}^\nu(x) - \mathrm{tg}\,\frac{\nu\pi}{2}\,\Pi^\nu(x),$$

so daß die Entwicklungen (14) und (15) unmittelbar die Potenzreihen:

(22) $$\Omega^{2n}(x) = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s-n+\frac{3}{2}\right)},$$

(22a) $$\Omega^{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s-n+\frac{1}{2}\right)},$$

geben, wo n also eine ganze Zahl bedeuten muß.

Die Formel (21) ist explicite von H. F. Weber-Zürich[1]) gegeben worden, während die damit identische (21a) nur ein Spezialfall der allgemeinen Formel (2) von Cauchy ist. Die Funktionen (22) und (22a) spielen eine nicht unwichtige Rolle in der mathematischen Physik, wie Arbeiten von Lord Rayleigh[2]) und Struve[3]) zeigen. — H. F. Weber[4]) hat die Ω-Funktion für $\nu = \frac{1}{2}$ benutzt.

Für die Funktion $\Omega^\nu(x)$ findet man aus (20) die Fundamentalformeln:

(23) $$\Omega^{\nu-1}(x) - \Omega^{\nu+1}(x) = 2D_x\Omega^\nu(x),$$

(23a) $$\Omega^{\nu-1}(x) + \Omega^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\,\Omega^\nu(x) + \frac{4\sin^2\frac{\nu\pi}{2}}{\pi x}$$

und die nicht homogene lineare Differentialgleichung:

(24) $$y^{(2)} + \frac{1}{x}\,y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \frac{2\cos^2\frac{\nu\pi}{2}}{\pi x} + \frac{2\nu\sin^2\frac{\nu\pi}{2}}{\pi x^2}.$$

Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so liefert die Formel (21a) noch die anderen:

(25) $$\Omega^{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\left(D_\nu \mathrm{X}^\nu(x)\right)_{\nu=2n}, \quad \Omega^{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\left(D_\nu \Pi^\nu(x)\right)_{\nu=2n+1};$$

unter derselben Voraussetzung über ν findet man dagegen:

(26) $$T^{2n}(x) = -2\left(D_\nu \Pi^\nu(x)\right)_{\nu=2n}, \quad T^{2n+1}(x) = -2\left(D_\nu \mathrm{X}^\nu(x)\right)_{\nu=2n+1},$$

1) loc. cit. p. 48.
2) Theory of Sound Bd. II, p. 164—168; 1896.
3) Wiedemann Annalen Bd. 17, p. 1011; 1882.
4) loc. cit. p. 52 ff.

wo $T^n(x)$ die in § 3, (11) definierte Funktion bedeutet; faßt man noch die zwei Formelgruppen (25) und (26) zusammen, so findet man allgemein, daß:

$$(27)\qquad 2(D_\nu \Psi^\nu(x))_{\nu=n} = \pi \cdot \Omega^n(x) - T^n(x)$$

sein muß, wo n eine willkürliche ganze positive oder negative Zahl bedeutet, so daß man unmittelbar aus (9) und (20) folgende Integraldarstellung findet:

$$(28)\qquad T^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi,$$

die auf ganz andere Weise schon von Schläfli[1]) gefunden worden ist.

Die Formeln (26) liefern für $T^n(x)$ noch ohne weiteres die wohlbekannten Fundamentalformeln:

$$(29)\qquad T^{n-1}(x) - T^{n+1}(x) = 2D_x T^n(x),$$

$$(29a)\qquad T^{n-1}(x) + T^{n+1}(x) = \frac{2n}{x}T^n(x) - \frac{4}{x}J^n(x) + \frac{4\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x}$$

und die Differentialgleichung:

$$(30)\qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y = -\frac{4n}{x^2}J^n(x) + \frac{2n\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x^2} + \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x}.$$

Wir bemerken noch, daß aus der Formel (27) mittels § 3, (16) die andere:

$$(31)\qquad 2\left(D_\nu J^n(x) - D_\nu \Psi^\nu(x)\right)_{\nu=n} = \pi\cdot Y^n(x) - \pi\cdot\Omega^n(x) + S^n(x)$$

folgt, wo n eine ganze Zahl bedeutet und $S^n(x)$ die in § 3, (10) definierte rationale Funktion von Schläfli ist, so daß wir für das Schläflische Polynom die Fundamentalformeln:

$$(32)\qquad S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2D_x S^n(x),$$

$$(32a)\qquad S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x) = \frac{2n}{x}S^n(x) + \frac{4\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x}$$

und die Differentialgleichung:

$$(33)\qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y = \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} + \frac{2n\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x^2}$$

finden, drei Formeln, welche schon von Schläfli[2]) gefunden worden sind.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 147; 1871.

2) loc. cit. p. 139.

§ 18. Zweites Integral von Bessel und die Funktion $Z^\nu(x)$.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Integraldarstellungen der J-Funktion haben den Übelstand, nur für ganzzahlige Werte des Parameters brauchbar zu sein, so daß wir andere elementare Integraldarstellungen zu suchen haben, welche mit diesem Mangel nicht behaftet sind. Zu diesem Zwecke nehmen wir das erste Eulersche Integral zum Ausgangspunkte und finden dann mit Zuhilfenahme der Formel (Γ_4) ohne Mühe folgende andere Darstellung:

$$(1)\qquad J^\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu}d\varphi,\quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

eine Formel, die für ganze ν ebenfalls von Bessel[1]) als Ausdruck für $J^\nu(x)$ gegeben worden ist. Sonst bemerken wir, daß Integrale dieser Form, wenn man die Gammafunktion rechter Hand wegnimmt, als Lösung der Besselschen Differentialgleichung schon von Euler[2]) und für ganze ν von Poisson[3]) angewandt worden sind; Poisson[4]) betrachtet noch den Fall, wo ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl bedeutet. In einer anderen Abhandlung führt Poisson[5]) gleichzeitig die Funktionen $J^{k-1}(x)$ und $J^{1-k}(x)$ als Integrale der zugehörigen Besselschen Gleichung ein.

Setzt man in (1) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ, so läßt sich diese Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$(1a)\qquad J^\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}d\varphi,\quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2};$$

beachtet man noch, daß das ähnliche Integral mit $\sin(x\cos\varphi)$ statt $\cos(x\cos\varphi)$ gleich Null sein muß, so findet man auch die weitere Integraldarstellung:

$$(2)\qquad J^\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2\nu}d\varphi,\quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

die also nur *formell* von (1) verschieden ist.

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 36.
2) Institutiones calculi integralis Bd. 2, p. 298; 1769.
3) Journal de l'École Polytechnique cahier 19, p. 300; 1823.
4) loc. cit. p. 299.
5) Journal de l'École Polytechnique cahier 19, p. 475; 1823.

Nachdem wir diese neue Integraldarstellung der J-Funktion gewonnen haben, ist es sehr leicht, die folgende Formel von Bessel[1]):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos(y\sin\varphi)\,d\varphi = J^0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{3}$$

zu beweisen. Wir brauchen nämlich nur statt $\cos(y\sin\varphi)$ die gewöhnliche Potenzreihe einzusetzen; die Integration der einzelnen Glieder läßt sich dann unmittelbar mittelst (2) ausführen. Wenden wir noch (Γ_4) an, so gibt die Taylorsche Reihe § 10, (8) unmittelbar die gesuchte Formel (3).

Differentiiert man nun das Besselsche Integral (1) nach ν, so erhält man für $\nu = 0$ mittelst § 3, (16):

$$\pi Y^0(x) - 2(C + \log 2)J^0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos\varphi)\log(x\sin^2\varphi)\,d\varphi; \tag{4}$$

das Integral rechter Hand in dieser Formel, mit welchem sich Neumann[2]) eingehend beschäftigt hat, ist schon von Poisson[3]) als zweites Integral der Besselschen Gleichung für $\nu = 0$ angegeben worden.

Wir haben hier noch eine andere interessante Anwendung des zweiten Besselschen Integrales (1) zu erwähnen. Die allgemeine Methode für die Entwicklung in eine Fouriersche Reihe, welche im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ anwendbar ist, gibt nämlich mittelst (1) die Formel:

$$\frac{(\pi^2 - x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\nu-1}\pi^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\varepsilon_s\cdot\frac{J^\nu(s\pi)}{s^\nu}\cdot\cos(sx), \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}, \tag{5}$$

wo $\varepsilon_0 = 1$, aber $\varepsilon_s = 2$ für $s > 0$ zu setzen ist; für $\nu = 0$ ist diese Formel von Cinelli[4]) gefunden. Die Reihe rechter Hand hat für $x = \pm\pi$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ die Summe Null; wir haben in den Kapiteln XXIV, XXV Näheres über solche Entwicklungen der Null mitzuteilen. Wenden wir noch auf (5) das Besselsche Integral (1) an, so erhalten wir eine eigentümliche Partialbruchentwicklung der J-Funktion, welche wir indessen in § 22 in viel allgemeinerer Form zu geben haben.

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 37.

2) Theorie der Besselschen Funktionen p. 46—48; 1867.

3) Journal de l'École Polytechnique cahier 19 p. 476; 1823.

4) Nuovo Cimento (4) Bd. 1; 1895.

Es ist zu bemerken, daß sich für $\nu = \frac{1}{2}$ die Formel (5) auf eine *formale* Identität reduziert; dies hängt damit zusammen, daß eine Konstante nicht in eine gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe, die in einem Intervalle von der Größe 2π anwendbar ist, entwickelt werden kann.

Setzen wir nun ν als ganze Zahl voraus, so wird die Formel (1) in Vergleichung mit § 17, (7) sehr interessant. Jacobi[1]) hat eine eigentümliche allgemeine Methode angegeben, welche uns direkt von den letztgenannten Formeln aus zu (1) führt. Es ist offenbar, daß diese zwei Formelklassen interessante Identitäten zwischen den J-Funktionen ergeben müssen.

Erinnert man sich nämlich der Formel:

$$(6) \qquad (2\cos\omega)^n = 2 \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n}{2}}{}' \binom{n}{s} \cos(n-2s)\omega,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, der Accent nach dem Summenzeichen aber besagen soll, daß, falls n gerade ist, das letzte Glied, für $2s = n$, zu halbieren ist, so findet man unter Anwendung von (1) und § 17, (7):

$$(7) \qquad \frac{J^n(x)}{n!\left(\frac{x}{2}\right)^n} = 2 \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n}{2}}{}' \frac{J^{2n-2s}(x)}{s!\,(2n-s)!},$$

während die andere elementare Formel:

$$(8) \qquad (-1)^n \cos(2n\omega) = n \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\,(2n-s-1)!}{s!\,(n-s)!}\,(2\cos\omega)^{2s}$$

auf ähnliche Weise die zu (7) umgekehrte Formel gibt:

$$(9) \qquad J^{2n}(x) = n \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\,(2n-s-1)!}{s!\,(n-s)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-s} J^{n-s}(x).$$

Anger hat auf diese Weise versucht, das zweite Besselsche Integral unmittelbar aus dem ersten herzuleiten; er stellt die Formel (7)[2]) auf, ohne sie aber direkt zu beweisen; darauf kommt es ja aber hier gerade an. Unsere allgemeinen Untersuchungen über Reihenentwicklungen nach Cylinderfunktionen werden uns später in

---

1) Journal für Mathematik Bd. 15; 1836.

2) Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig Bd. 5.

§ 109 Formel (4) und in § 106 Formel (7) ermöglichen, beziehungsweise (7) und (9) direkt und voneinander unabhängig zu verallgemeinern.

Wir betrachten nun das (1) sehr ähnliche Integral:

$$(10)\quad Z^{\nu}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu} d\varphi, \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

und finden auf dieselbe Weise die Reihenentwicklung:

$$(11)\qquad Z^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s+1}}{\Gamma(s+\frac{3}{2})\,\Gamma(s+\nu+\frac{3}{2})},$$

welche uns die Funktion $Z^{\nu}(x)$ für alle Werte von ν definiert; für ganzzahlige ν ist diese Funktion von P. Siemon[1]) untersucht worden.

Es leuchtet ein, daß die Formel (2) hier bei $Z^{\nu}(x)$ kein Analogon hat; dagegen findet man einen anderen Integralausdruck:

$$(12)\qquad J^{\nu}(x) + iZ^{\nu}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix\cos\varphi}(\sin\varphi)^{2\nu} d\varphi,$$

$$\Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

von welchem der Spezialfall $\nu = 0$ von Lord Rayleigh[2]) erörtert worden ist.

Um die Fundamentalformeln für $Z^{\nu}(x)$ zu finden, gehen wir von der Reihenentwicklung (11) aus und finden ohne Mühe:

$$(13)\qquad D_x(x^{\nu} Z^{\nu}(x)) = x^{\nu} Z^{\nu-1}(x),$$

$$(13a)\qquad D_x(x^{-\nu} Z^{\nu}(x)) = -x^{-\nu} Z^{\nu+1}(x) + \frac{1}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})};$$

man erhält schließlich daraus die Fundamentalformeln:

$$(14)\qquad Z^{\nu-1}(x) - Z^{\nu+1}(x) = 2D_x Z^{\nu}(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})},$$

$$(14a)\qquad Z^{\nu-1}(x) + Z^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z^{\nu}(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})},$$

---

1) Programm der Luisenschule, Berlin 1890.

2) Theory of Sound, Bd. II p. 163; 1896.

aus denen man wiederum die Differentialgleichung:

$$(15)\qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$$

herleitet.

Setzt man nun $\nu = -n - \frac{1}{2}$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so wird diese Gleichung (15) ein Spezialfall der Besselschen Gleichung, und man findet so, wie auch die Reihe (11) bestätigt, daß:

$$(16)\qquad Z^{-n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n J^{n+\frac{1}{2}}(x)$$

sein muß; mit derselben Bedeutung von n gibt (11) nach einer einfachen Anwendung von (Γ_3) weiterhin die analoge Formel:

$$(16a)\quad Z^{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}J^{-n-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}{}' \frac{\Gamma(n-s+\frac{1}{2})}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s+\frac{1}{2}}.$$

Man bemerke, daß die letzte Funktion rechter Hand in dieser Formel eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Schläflischen Polynome $S^n(x)$ darbietet.

Im anderen Spezialfalle, wo ν eine positive ganze Zahl n bedeutet, findet man dagegen:

$$(17)\qquad Z^n(x) = \Omega^n(x) - \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2s-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)\,\Gamma(n-s+\frac{1}{2})},$$

$$(17a)\qquad Z^{-n}(x) = (-1)^n\Omega^n(x) + \sum_{s=0}^{<\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s+1}}{\Gamma(\frac{3}{2}+s)\,\Gamma(s-n+\frac{3}{2})},$$

für $n = 0$ aber:

$$(17b)\qquad Z^0(x) = \Omega^0(x).$$

Wir erwähnen noch, daß die elementaren Formeln (6) und (8) die zwei Identitäten

$$(18)\qquad \frac{Z^n(x)}{n!\left(\frac{x}{2}\right)^n} = 2\cdot\sum_{s=0}^{s=n}{}' \frac{\Omega^{2n-2s}(x)}{s!\,(2n-s)!},$$

$$(19)\qquad \Omega^{2n}(x) = n\cdot\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s(2n-s-1)!}{s!\,(n-s)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-s} Z^{n-s}(x)$$

ergeben.

§ 19. Das Integral von Hansen und die Funktionen $\Phi^\nu(x)$, $\Lambda^n(x)$ und $\mathfrak{T}^n(x)$.

Die Integralausdrücke § 17, (7) geben unter Anwendung der allgemeinen Formeln von Cauchy folgende andere Integraldarstellung:

$$(1) \qquad J^n(x) = \frac{1}{\pi i^n} \cdot \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \cos(n\varphi)\, d\varphi,$$

welche von Hansen[1]) herrührt, und in der wiederum *n eine ganze Zahl* sein muß. Diese Formel ist offenbar mit § 18, (2) durch die allgemeine Transformation von Jacobi verbunden.

Bedeutet im Integrale rechter Hand in (1) n keine ganze Zahl, so definiert dies Integral immer eine neue Funktion, welche eine ganze Transcendente der beiden Variabeln sein muß. Setzt man

$$(2) \qquad \Phi^\nu(x) = \frac{1}{\pi i^\nu} \cdot \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \cos(\nu\varphi)\, d\varphi,$$

so gewinnt man für diese Funktion ohne Mühe die folgenden Fundamentalgleichungen:

$$(3) \qquad \Phi^{\nu-1}(x) - \Phi^{\nu+1}(x) = 2D_x\Phi^\nu(x),$$

$$(3a) \qquad \Phi^{\nu-1}(x) + \Phi^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\Phi^\nu(x) - \frac{2e^{-ix}\sin\nu\pi}{\pi x i^\nu}$$

und die nicht homogene lineare Differentialgleichung:

$$(4) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = -\frac{\nu e^{-ix}\sin\nu\pi}{\pi x^2 i^\nu}.$$

Die Potenzreihe in x für $\Phi^\nu(x)$ selbst ist etwas kompliziert, weil man die Koeffizienten im allgemeinen nicht durch eingliedrige Ausdrücke darstellen kann; dagegen wird die Potenzreihe sehr einfach, wenn man sie mit e^{-ix} multipliziert. Betrachtet man nämlich die Funktion:

$$e^{ix}\Phi^\nu(x) = \frac{1}{\pi i^\nu} \cdot \int_0^\pi e^{2ix\cos^2\frac{\varphi}{2}} \cos(\nu\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{\pi i^\nu} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2ix\cos^2\varphi} \cos(2\nu\varphi)\, d\varphi$$

und ersetzt man im letzten Integrale die Exponentialfunktion durch ihre Potenzreihe, so liefern die Formeln (Γ_{19}) und (Γ_4) folgende elegante Entwicklung:

---

1) Mémoire sur la détermination des perturbations absolue, p. 105; Paris 1845. Deutsch 1843.

$$(5)\qquad \Phi^\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{\pi i^\nu}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})(2xi)^s}{\Gamma(s+\nu+1)\Gamma(s-\nu+1)},$$

die zu der in § 6 Formel (7) für $J^\nu(x)$ gegebenen analog ist.

Wir haben noch die mit $\Phi^\nu(x)$ analoge Funktion:

$$(6)\qquad \Lambda^\nu(x) = \frac{1}{\pi i^{\nu-1}} \cdot \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \sin(\nu\varphi)\, d\varphi$$

zu betrachten, in welcher der Exponent von i im Nenner geändert ist, um die Funktion reell zu machen, falls x reell ist, während ν eine ganze Zahl bedeutet. Um die Λ-Funktion auf Φ-Funktionen zu reduzieren, setzt man in (2) $-x$ für x und $\pi-\varphi$ für φ und findet dann ohne Mühe:

$$(7)\qquad \Lambda^\nu(x) = \frac{i}{\sin\nu\pi}\left(\Phi^\nu(-x) - \cos\nu\pi \cdot \Phi^\nu(x)\right),$$

eine Formel, welche mit § 3, (2) für $Y^\nu(x)$ und § 17, (21) für $\Omega^\nu(x)$ ganz analog ist. Wenn ν eine ganze Zahl bedeutet, so reduziert sich $\Lambda^\nu(x)$ auf elementare Funktionen; den so erhaltenen Ausdruck, welcher mit demjenigen für $J^{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)$ ähnlich ist, findet man am Schlusse dieses Paragraphen.

Für die Λ-Funktion erhält man die Fundamentalformeln:

$$(8)\qquad \Lambda^{\nu-1}(x) - \Lambda^{\nu+1}(x) = 2D_x\Lambda^\nu(x),$$

$$(8a)\qquad \Lambda^{\nu-1}(x) + \Lambda^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\Lambda^\nu(x) - \frac{2(e^{ix} - e^{-ix}\cos\nu\pi)}{\pi x i^{\nu-1}}$$

und die Differentialgleichung:

$$(9)\qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = -\frac{\nu(e^{ix} - e^{-ix}\cos\nu\pi)}{\pi x^2 i^{\nu-1}}$$

Wir haben noch zu beweisen, daß uns unsere Φ-Funktion zu der in § 6, (10) definierten Funktion $\mathfrak{T}^n(x)$ führt, ebenso wie uns $\Psi^\nu(x)$ zu $T^n(x)$ geführt hat. Bedeutet nämlich n eine ganze Zahl, so finden wir, daß

$$(10)\qquad -2\left(D_\nu\Phi^\nu(x)\right)_{\nu=n} = \mathfrak{T}^n(x) + \pi i J^n(x)$$

sein muß, woraus wir dann weiter den mit dem für $T^n(x)$ in § 17, (28) gegebenen analogen Integralausdruck:

$$(11)\qquad \mathfrak{T}^n(x) = \frac{2}{\pi i^n} \cdot \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\sin(n\varphi)\cdot\varphi\, d\varphi$$

herleiten. Aus (10) finden wir weiter für $\mathfrak{T}^n(x)$ ohne Mühe die Fundamentalformeln:

$$(12) \qquad \mathfrak{T}^{n-1}(x) - \mathfrak{T}^{n+1}(x) = 2 D_x \mathfrak{T}^n(x),$$

$$(12a) \qquad \mathfrak{T}^{n-1}(x) + \mathfrak{T}^{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathfrak{T}^n(x) - \frac{4}{x} J^n(x) + \frac{4e^{-ix}i^n}{x}$$

und die Differentialgleichung:

$$(13) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = -\frac{4n}{x} J^n(x) + \frac{2ne^{-ix}i^n}{x^2},$$

Formeln, welche ganz analog mit den in § 17 für $T^n(x)$ gegebenen sind.

Kombiniert man noch (10) mit § 6, (9), so findet man die mit § 17, (31) analoge Formel:

$$(14) \quad 2\left(D_\nu J^\nu(x) - D_\nu \Phi^\nu(x)\right)_{\nu=n} = \pi Y^n(x) + \pi i J^n(x) + \mathfrak{S}^n(x),$$

aus der sich für $\mathfrak{S}^n(x)$ die Fundamentalformeln:

$$(15) \qquad \mathfrak{S}^{n-1}(x) - \mathfrak{S}^{n+1}(x) = 2 D_x \mathfrak{S}^n(x),$$

$$(15a) \qquad \mathfrak{S}^{n-1}(x) + \mathfrak{S}^{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathfrak{S}^n(x) + \frac{4e^{-ix}i^n}{x}$$

und die nicht homogene Differentialgleichung:

$$(16) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = \frac{2ne^{-ix}i^n}{x^2}$$

ergeben.

Der oben gefundene Integralausdruck für $\mathfrak{T}^n(x)$ erlaubt uns, ohne Mühe den expliziten Ausdruck für die Λ-Funktion zu gewinnen. Die Formel (11) gibt nämlich:

$$(-1)^{n-1}\mathfrak{T}^n(-x) = \frac{2}{\pi i^n} \cdot \int_0^\pi (\pi - \varphi) e^{ix\cos\varphi} \sin(n\varphi)\, d\varphi,$$

woraus unter Anwendung von (11) und (6):

$$(17) \qquad \mathfrak{T}^n(x) - (-1)^n \mathfrak{T}^n(-x) = -2\pi i \Lambda^n(x)$$

und mit Hilfe von § 6, (13) folgt, daß

$$(18) \qquad \pi\Lambda^n(x) = \frac{i}{2}\left(\mathfrak{S}^n(x) - (-1)^n \mathfrak{S}^n(-x)\right)$$

sein muß. Führt man nun der Kürze halber die beiden rationalen Funktionen:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1^n(x) = 2\sqrt{\pi}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s(2n-2s-1)!}{(2s)!\,\Gamma(n-2s+\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-2s} \\ \mathfrak{S}_2^n(x) = 2\sqrt{\pi}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s\leq\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^s(2n-2s-2)!}{(2s+1)!\,\Gamma(n-2s-\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{n-2s-1} \end{cases}$$

ein, so findet man:

$$(20)\quad \mathfrak{S}^n(x) = \mathfrak{S}_1^n(x)\cos x + \mathfrak{S}_2^n(x)\sin x + i(\mathfrak{S}_2^n(x)\cos x - \mathfrak{S}_1^n(x)\sin x);$$

also läßt sich die Formel (18) auch folgendermaßen darstellen:

$$(21)\qquad \pi\Lambda^n(x) = \mathfrak{S}_1^n(x)\sin x - \mathfrak{S}_2^n(x)\cos x.$$

Aus (18) findet man nun durch Zuhilfenahme von (6) den ersten der in § 6 erwähnten Integralausdrücke.

§ 20. Zwei Integralklassen. Formeltafeln. Die Funktion $M^n(x)$.

Es ist sehr leicht einzusehen, daß sich die acht Integrale

$$(1)\qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left\{x\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right\}\begin{matrix}\cos(\nu\varphi)\\ \sin(\nu\varphi)\end{matrix}\,d\varphi,$$

wenn ν keine ganze Zahl ist, als lineare homogene Funktionen von $\Psi^\nu(\pm x)$ und $\Phi^\nu(\pm x)$ darstellen lassen. Dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn ν gleich einer ganzen Zahl n angenommen wird; dann treten nämlich außer $J^n(x)$ auch die zwei anderen Funktionen $\Omega^n(x)$ und $\Lambda^n(x)$ auf.

Da eben diese Integrale sehr häufig in den Anwendungen auftreten, scheint es uns angemessen, hier eine Tafel ihrer Werte mitzuteilen:

$$(2)\quad \begin{cases} J^{2n}(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi \\ J^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^n}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} J^{2n+1}(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\,d\varphi \\ J^{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^n}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^\pi \sin(x\cos\varphi)\cos(2n+1)\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \Omega^{2n}(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi) \cos(2n\varphi)\, d\varphi \\ \Omega^{2n+1}(x) = -\dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi) \sin(2n+1)\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathsf{\Lambda}^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x \cos\varphi) \sin(2n\varphi)\, d\varphi \\ \mathsf{\Lambda}^{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n}}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \cos\varphi) \sin(2n+1)\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich leicht aus den allgemeinen Formeln von Cauchy in § 17 herleiten; ebenso ist es offenbar, daß die acht übrigen Integrale von derselben Form immer gleich Null sein müssen.

Betrachtet man nun die acht anderen mit (1) analogen Integrale:

$$(6)\quad \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left\{ x \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \right\} \begin{matrix}\cos(\nu\varphi)\\ \sin(\nu\varphi)\end{matrix}\, d\varphi$$

genauer, so erhellt offenbar, daß sich dieselben, auch wenn ν keine ganze Zahl bedeutet, als eine lineare homogene Funktion von $\Psi(\pm x)$ und $\Phi^{\nu}(\pm x)$ darstellen lassen, wie dies unmittelbar aus den obenerwähnten Formeln von Cauchy hervorgeht. Um diese neue Integralklasse auch in dem Falle zu bestimmen, in welchem ν eine ganze Zahl bedeutet, geben wir hier eine weitere Tafel von Integralformeln, welche gleichfalls sehr häufig gebraucht werden:

$$(7)\quad \begin{cases} J^{2n}(x) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi) \cos(2n\varphi)\, d\varphi \\ J^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n}\, 2}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos\varphi) \cos(2n\varphi)\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} J^{2n+1}(x) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \sin\varphi) \sin(2n+1)\varphi\, d\varphi \\ J^{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n}\, 2}{\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos\varphi) \cos(2n+1)\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega^{2n}(x) = \dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi \\ \Omega^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^n 2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \Omega^{2n+1}(x) = -\dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\,d\varphi \\ \Omega^{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} 2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi)\cos(2n+1)\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} \mathsf{\Lambda}^{2n}(x) = \dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\sin(2n\varphi)\,d\varphi \\ \mathsf{\Lambda}^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} 2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\sin(2n\varphi)\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \mathsf{\Lambda}^{2n+1}(x) = \dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\cos(2n+1)\varphi\,d\varphi \\ \mathsf{\Lambda}^{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^n 2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi)\sin(2n+1)\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Es leuchtet also ein, daß unsere drei Funktionen noch nicht ausreichen, um alle Integrale von der Form (6) zu bestimmen; man muß in der Tat noch die vierte:

$$(13)\quad \begin{cases} \mathsf{M}^{2n}(x) = \dfrac{2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\sin(2n\varphi)\,d\varphi \\ \mathsf{M}^{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} 2}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi)\sin(2n\varphi)\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \mathsf{M}^{2n+1}(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\cos(2n+1)\varphi\, d\varphi \\ \mathsf{M}^{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n 2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

zu Hilfe nehmen. Diese ganze transcendente Funktion ist $\Lambda^n(x)$ sehr ähnlich, und ihr expliziter Ausdruck läßt sich denn auch auf ähnliche Weise mittelst der Integralausdrücke für die Funktionen $T^n(x)$ und $\mathfrak{T}^n(x)$ bestimmen. Man findet nämlich aus § 19, (11):

$$\mathfrak{T}^n(x)+(-1)^n\mathfrak{T}^n(-x) = -\frac{8}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\cos\left(x\sin\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi$$

und aus § 17, (28):

$$2T^n(x) = \frac{8}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\left(x\sin\varphi-\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi;$$

daraus folgt mittelst (13) und (14):

$$(15)\qquad \mathfrak{T}^n(x)+(-1)^n\mathfrak{T}^n(-x)-2T^n(x) = 2\pi\mathsf{M}^n(x);$$

gemäß § 6, (14) ergibt dies wieder die weitere Formel:

$$(16)\qquad \pi\mathsf{M}^n(x) = \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{S}^n(x)+(-1)^n\mathfrak{S}^n(-x)\right)-S^n(x);$$

also haben wir auch den zweiten der in § 6 erwähnten Integralausdrücke gefunden. Führt man noch die in § 19, (19) definierten rationalen Funktionen ein, so erhält man aus (16) den einfacheren Ausdruck:

$$(17)\qquad \pi\mathsf{M}^n(x) = \mathfrak{S}_1^n(x)\cos x+\mathfrak{S}_2^n(x)\sin x - S^n(x).$$

Vergleicht man diese Formel mit der analogen § 19, (21), so gewinnt man die Identität:

$$(18)\qquad \left(\pi\Lambda^n(x)\right)^2+\left(\pi\mathsf{M}^n(x)+S^n(x)\right)^2 = \left(\mathfrak{S}_1^n(x)\right)^2+\left(\mathfrak{S}_2^n(x)\right)^2,$$

welche der Lommelschen Formel § 11, (13) analog ist.

Für die M-Funktion findet man die Fundamentalformeln:

$$(19)\qquad \mathsf{M}^{n-1}(x)-\mathsf{M}^{n+1}(x) = 2D_x\mathsf{M}^n(x),$$

$$(19\text{a})\qquad \mathsf{M}^{n-1}(x)+\mathsf{M}^{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathsf{M}^n(x)+\frac{4}{\pi x}\left[\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)-\cos^2\frac{n\pi}{2}\right]$$

und die Differentialgleichung:

$$(20)\quad y^{(2)} + \frac{1}{x}\,y^{(1)} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = \frac{2n}{\pi x^2}\left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) - \cos^2\frac{n\pi}{2}\right] - \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{\pi x}.$$

Wir bemerken noch, daß die letzte Formeltafel folgende zwei interessante Identitäten liefert:

$$(21)\qquad J^n(x) + \Lambda^n(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi,$$

$$(22)\qquad \Omega^n(x) - \mathsf{M}^n(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi;$$

aus (17) und § 19, (21) ergibt sich weiter, daß:

$$(23)\qquad \pi\mathsf{M}^n(x) - \pi i\Lambda^n(x) = \mathfrak{S}^n(x) - S^n(x)$$

sein muß, so daß die obenerwähnte Formeltafel noch die Integralrelation ergibt:

$$(24)\qquad \mathfrak{S}^n(x) - S^n(x) = \frac{2}{i^n}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-ix\cos\varphi}\sin(n\varphi)\,d\varphi.$$

§ 21. Integralausdrücke für das Produkt $J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\nu}{2}}(x)$, n ganz.

Dieselbe Formel (Γ_{19}), welche wir schon häufig angewandt haben, gibt mittels § 6, (4) auch die einfache Formel:

$$(1)\qquad J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}J^n(2x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi,$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; mittelst der Cauchyschen Formeln § 17, (2) läßt sich (1) auch folgendermaßen schreiben:

$$(2)\qquad \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}J^n(2x\cos\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi,$$

$$(3)\qquad \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\,J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}J^n(2x\cos\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi.$$

Neumann[1]) hat diese Formel (1) für gerades n und $\nu = 0$ gefunden, während Schläfli[2]) die etwas allgemeinere Formel (1) gegeben hat, in der auch ν eine ganze Zahl ist, so daß $n \pm \nu$ gerade Zahlen sind.

Führt man noch in (1) die Ausdrücke § 20, (7) und (8) ein, so findet man folgende Doppelintegrale von ganz elementarer Form:

$$(4)\qquad J^{n+\frac{\nu}{2}}(x)\, J^{n-\frac{\nu}{2}}(x) = \frac{4}{\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x\cos\varphi\sin\psi)\cos(\nu\varphi)\cos(2n\psi)\,d\varphi\,d\psi,$$

$$(5)\qquad J^{n+\frac{1+\nu}{2}}(x)\, J^{n+\frac{1-\nu}{2}}(x) = \frac{4}{\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x\cos\varphi\sin\psi)\cos(\nu\varphi)\sin(2n+1)\psi\,d\varphi\,d\psi.$$

Hier kann die Integrationsfolge offenbar willkürlich vertauscht werden; integriert man zuerst nach ψ, so findet man die Formel (1) wieder, während die Integration, zuerst nach φ genommen, mittelst § 17, (12a) und (13a) die zwei anderen Formeln gibt:

$$(6)\qquad \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot J^{n+\frac{\nu}{2}}(x)\, J^{n-\frac{\nu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Pi^{\nu}(2x\sin\psi)\cos(2n\psi)\,d\psi,$$

$$(7)\qquad \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot J^{n+\frac{1+\nu}{2}}(x)\, J^{n+\frac{1-\nu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{X}^{\nu}(2x\sin\psi)\sin(2n+1)\psi\,d\psi.$$

Setzt man weiter in (6) und (7) voraus, daß ν eine ungerade, respektive eine gerade ganze Zahl ist, so findet man:

$$(8)\qquad (-1)^{p+1} J^{n+p+\frac{1}{2}}(x)\, J^{n-p-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega^{2p+1}(2x\sin\varphi)\cos(2n\varphi)\,d\varphi,$$

$$(9)\qquad (-1)^{p} J^{n+p+\frac{1}{2}}(x)\, J^{n-p+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega^{2p}(2x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\,d\varphi;$$

daraus ergeben sich für $n = p = 0$ die bemerkenswerten Formeln:

---

1) Theorie der Besselschen Funktionen p. 70; 1867.

2) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 142; 1871.

$$(10) \qquad \frac{\sin 2x}{2x} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega^1(2x \sin\varphi)\, d\varphi,$$

$$(11) \qquad \frac{\sin^2 x}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega^0(2x \sin\varphi) \sin\varphi\, d\varphi.$$

§ 22. Einige Entwicklungen, die nach Cylinderfunktionen fortschreiten.

Die Integralformeln, welche wir soeben gefunden haben, erlauben uns, sehr leicht einige merkwürdige Fouriersche Reihenentwicklungen zu bilden. Erstens findet man aus dem ersten Besselschen Integrale folgende Formeln:

$$(1) \qquad \cos(x \sin\varphi) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_{2s} J^{2s}(x) \cos(2s\varphi),$$

$$(2) \qquad \sin(x \sin\varphi) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_{2s+1} J^{2s+1}(x) \sin(2s+1)\varphi,$$

wo ε_s im allgemeinen gleich 2 zu nehmen ist, außer wenn $s = 0$, wo man $\varepsilon_0 = 1$ zu setzen hat; diese Reihen sind von Jacobi[1]) gegeben.

Der asymptotische Ausdruck § 2, (3) zeigt, daß die Formeln (1) und (2) auch für imaginäre Werte von φ anwendbar sind; setzt man nun $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ, so findet man:

$$(3) \qquad e^{ix\cos\varphi} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{i^s} J^s(x) \cos(s\varphi),$$

so daß die Annahme:

$$e^{i\varphi} = t, \qquad 2\cos(s\varphi) = t^s + t^{-s}$$

zu folgender Entwicklung führt:

$$(4) \qquad e^{\frac{xi}{2}(t+t^{-1})} = J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty} i^{-s} J^s(x)(t^s + t^{-s}),$$

von welcher Hansen[2]) und Schlömilch[3]) Gebrauch gemacht haben.

---

1) Journal für Mathematik, Bd. 15, p. 12; 1836.

2) Mémoire sur la détermination des perturbations absolues, p. 100, 107.

3) Zeitschrift für Math. und Physik, Bd. 2, p. 138; 1857.

Setzt man weiter in (1) $\varphi = 0$, so findet man die bemerkenswerte Formel:

$$(5) \qquad 1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{2s}(x),$$

während die Annahme $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die zwei weiteren Entwicklungen liefert:

$$(6) \qquad \cos x = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s J^{2s}(x),$$

$$(7) \qquad \sin x = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} J^{2s+1}(x).$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ findet man auf dieselbe Weise Reihenentwicklungen nach Cylinderfunktionen für $\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Die Formeln des § 21 geben in ähnlicher Weise die mit (1) und (2) analogen Formeln:

$$(8) \; J^\nu(2x \sin\varphi) = \cos\frac{\nu\pi}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{s+\frac{\nu}{2}}(x) J^{s-\frac{\nu}{2}}(x) \cos(2s\varphi),$$

$$(9) \; J^\nu(2x \sin\varphi) = \sin\frac{\nu\pi}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_{2s+1} J^{s+\frac{1+\nu}{2}}(x) J^{s+\frac{1-\nu}{2}}(x) \sin(2s+1)\varphi,$$

die auch für endliche imaginäre Werte von φ anwendbar sind; setzt man $\varphi = 0$, so findet man aus (8) folgende Entwicklung:

$$(10) \qquad \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{s+\nu}(x) J^{s-\nu}(x),$$

woraus für $\nu = 0$ die von Hansen[1]) gegebene elegante Entwicklung folgt:

$$(11) \qquad 1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s (J^s(x))^2.$$

Die Annahme $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gibt weiterhin:

$$(12) \; J^\nu(2x) = \cos\frac{\nu\pi}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^{s+\frac{\nu}{2}}(x) J^{s-\frac{\nu}{2}}(x) \cos s\pi,$$

$$(13) \; J^\nu(2x) = \sin\frac{\nu\pi}{2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_{2s+1} J^{s+\frac{1+\nu}{2}}(x) J^{s+\frac{1-\nu}{2}}(x) \sin\frac{(2s+1)\pi}{2}.$$

---

1) loc. cit. p. [illegible]

während die Annahme $\varphi = \frac{\pi}{2}$ Entwicklungen für $\Pi^\nu(2x)$ und $X^\nu(2x)$ liefert. Wenn ν eine ganze gerade, bez. ungerade Zahl bedeutet, so gewinnt man aus (12) und (13) eigentümliche Entwicklungen für Besselsche Cylinderfunktionen mit ganzem Parameter, während die Annahme eines ungeraden, bez. geraden ν ähnliche Entwicklungen für die Ω-Funktionen ergibt.

Andere Reihenentwicklungen, welche nach Cylinderfunktionen fortschreiten, lassen sich mittelst derselben Integralformeln herleiten, wenn wir von den Fourierschen Reihen (T_1) und (T_2):

$$(14)\quad \cos(\nu\varphi) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\nu} + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\nu+s} + \frac{1}{\nu-s}\right)\cos(s\varphi)\right),$$

$$(15)\quad \sin(\nu\varphi) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\nu-s} - \frac{1}{\nu+s}\right)\sin(s\varphi)$$

Gebrauch machen; sie sind beide im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ anwendbar, diese Grenzen selbst für die letzte Reihe ausgeschlossen; ν bedeutet eine willkürliche, endliche Größe.

Aus den Formeln (14) und (15) findet man sehr leicht folgende drei Entwicklungen nach Cylinderfunktionen:

$$(16)\quad \Pi^\nu(x) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\nu}J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\nu+2s} + \frac{1}{\nu-2s}\right)J^{2s}(x)\right),$$

$$(17)\quad X^\nu(x) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{\nu+2s+1} - \frac{1}{\nu-2s-1}\right)J^{2s+1}(x),$$

$$(18)\quad \Phi^\nu(x) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi i^\nu}\cdot\left(\frac{1}{\nu}J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}i^{-s}\left(\frac{1}{\nu+s} + \frac{1}{\nu-s}\right)J^s(x)\right),$$

welche in der ganzen x-Ebene anwendbar sind.

Für die Funktionen Ω und Λ findet man nun ohne Mühe mittelst § 17, (25) und § 19, (7) folgende Entwicklungen:

$$(19)\quad \Omega^{2n}(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2s+1}{(2s+1)^2-4n^2}J^{2s+1}(x),$$

$$(20)\quad \Omega^{2n+1}(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{J^0(x)}{2n+1} + (4n+2)\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{J^{2s}(x)}{(2n+1)^2-4s^2}\right),$$

$$(21)\quad \Lambda^{2n}(x) = \frac{(-1)^n 4n}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s J^{2s+1}(x)}{(2s+1)^2-4n^2},$$

$$(22)\quad \Lambda^{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(4n+2)}{\pi}\cdot\left(\frac{J^0(x)}{(2n+1)^2} + 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s J^{2s}(x)}{(2n+1)^2-4s^2}\right),$$

während die Formeln § 17, (26) und § 19, (10) folgende Entwicklungen für die Funktionen T und $\mathfrak{T}$ liefern:

$$(23)\qquad T^n(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s}\Big(J^{n+2s}(x) - J^{n-2s}(x)\Big),$$

$$(24)\qquad \mathfrak{T}^n(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2\cdot i^{-s}}{s}\Big(J^{n+s}(x) - (-1)^s J^{n-s}(x)\Big),$$

von welchen die erste von Schläfli[1]) herrührt.

Die entsprechenden Entwicklungen für die Funktion M lassen sich nicht so unmittelbar durch diese Methode herleiten; indessen werden unsere allgemeinen Untersuchungen über die Neumannschen Reihen auch diese Formeln leicht ergeben.

Wir gehen hier nicht näher auf die ähnlichen Entwicklungen nach den Funktionen Ω, Λ und M ein, sondern kehren zu den Formeln (14) und (15) zurück, um noch einige Entwicklungen nach Produkten zweier Cylinderfunktionen herzuleiten.

Die Formel § 21, (1) gibt eine erste Reihe dieser Art:

$$(25)\quad J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\left[\Big(J^{\frac{n}{2}}(x)\Big)^2 + 2\nu^2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{\nu^2-s^2}J^{\frac{n+s}{2}}(x)J^{\frac{n-s}{2}}(x)\right],$$

während (2) und (3) in demselben Paragraphen die folgenden im Vergleiche zu (25) sehr eigentümlichen Entwicklungen ergeben:

$$(26)\quad J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{2\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\pi\nu}\left[\Big(J^{\frac{n}{2}}(x)\Big)^2 + 2\nu^2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\nu^2-4s^2}\cdot J^{\frac{n}{2}+s}(x)J^{\frac{n}{2}-s}(x)\right],$$

$$(27)\quad J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{4\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{2s+1}{(2s+1)^2-\nu^2}J^{\frac{n+1}{2}+s}(x)J^{\frac{n-1}{2}-s}(x).$$

Für $\nu = 1, n = 0$, bez. $\nu = 0, n = 1$ liefern (26) und (27) interessante Entwicklungen.

Nachdem wir diese ersten Beispiele der Neumannschen Reihen erster und zweiter Art gegeben haben, wenden wir uns nunmehr zu anderen Anwendungen derselben Formeln (14) und (15), indem wir

1) Mathematische Annalen, Bd. 3, p. 146; 1871.

α für ν und $x \sin\varphi$ für φ schreiben. Durch diese Substitutionen ergibt sich aus dem zweiten Besselschen Integrale ohne Mühe:

$$(28)\quad J^\nu(\alpha x) = \frac{\alpha^\nu \sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)\alpha} + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha+s}+\frac{1}{\alpha-s}\right)\cdot\frac{J^\nu(sx)}{s^\nu}\right),$$

$$(29)\quad Z^\nu(\alpha x) = \frac{\alpha^\nu \sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha-s}-\frac{1}{\alpha+s}\right)\cdot\frac{Z^\nu(sx)}{s^\nu},$$

und somit haben wir die in § 18 erwähnte Partialbruchzerlegung gegeben.

Die Integraldefinitionen der Funktionen Π und X liefern noch folgende Entwicklungen:

$$(30)\quad \Pi^\nu(\alpha x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\Pi^\nu(0) + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha+s}+\frac{1}{\alpha-s}\right)\Pi^\nu(sx)\right),$$

$$(31)\quad X^\nu(\alpha x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha-s}-\frac{1}{\alpha+s}\right)X^\nu(sx),$$

so daß die Integralformeln des § 21 folgende anderen geben müssen:

$$(32)\quad \begin{cases} J^{n+\frac{\nu}{2}}(\alpha x)J^{n-\frac{\nu}{2}}(\alpha x) = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\dfrac{1}{\alpha}J^{n+\frac{\nu}{2}}(0)J^{n-\frac{\nu}{2}}(0) + \right. \\ \qquad\left. + \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha+s}+\frac{1}{\alpha-s}\right)J^{n+\frac{\nu}{2}}(sx)J^{n-\frac{\nu}{2}}(sx)\right] \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} J^{n+\frac{1+\nu}{2}}(\alpha x)J^{n+\frac{1-\nu}{2}}(\alpha x) = \\ = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha-s}-\frac{1}{\alpha+s}\right)J^{n+\frac{1+\nu}{2}}(sx)J^{n+\frac{1-\nu}{2}}(sx). \end{cases}$$

Durch die sechs letzten Formeln haben wir ebensoviele Beispiele der Schlömilchschen Reihen der ersten, zweiten und dritten Art gegeben; indem wir uns vorbehalten, später solche Reihen näher zu betrachten, verzichten wir hier auf etwaige andere spezielle Entwicklungen dieser Art.

§ 23. Die Besselsche Auflösung der Keplerschen Gleichung.

Als letzte Anwendung der elementaren Integraldarstellungen für die J-Funktion wollen wir noch die Besselsche Auflösung der Keplerschen Gleichung mitteilen, weil ebendiese Auflösung in der Geschichte der Cylinderfunktionen eine Hauptrolle spielt; ja, man

darf wohl sagen, daß sie den Anstoß zur Ausbildung einer systematischen Theorie dieser Funktionen gegeben hat.

Wir betrachten also die Gleichung:

$$\omega - e \sin \omega = \varphi, \tag{1}$$

wo ω und φ reell sein sollen und $0 < e < 1$ vorausgesetzt wird, und suchen den unbekannten Winkel ω durch eine Fouriersche Reihe mit dem Argumente φ darzustellen, so daß wir zuerst zu beweisen haben, daß eine solche Entwicklung wirklich möglich ist.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die reelle Lösung ω als Funktion von φ und finden dann an ihr folgende Eigenschaften:

1) ω *ist eine eindeutige Funktion von* φ, *wenn* $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$ *vorausgesetzt wird.*

Sollten nämlich die zwei verschiedenen Werte ω_1 und ω_2 für dasselbe φ beide der Gleichung (1) Genüge leisten, so findet man unmittelbar, daß auch

$$\omega_1 - \omega_2 = 2e \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

sein müßte; dies ist aber unmöglich, weil e ein echter Bruch ist.

2) ω *ist eine überall endliche, kontinuierliche und differentiierbare Funktion in* φ, *wenn* $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$ *vorausgesetzt wird.*

Setzt man in der Tat:

$$\omega + k - e \sin(\omega + k) = \varphi + h,$$

so findet man mittelst (1):

$$k - 2e \cos\left(\omega + \frac{k}{2}\right) \sin \frac{k}{2} = h, \tag{2}$$

$$\lim_{h=0} \left(\frac{h}{k}\right) = \frac{d\varphi}{d\omega} = 1 - e \cos \omega. \tag{3}$$

3) ω *hat im obenerwähnten Intervall weder Maxima noch Minima, muß aber immer beständig zu- oder beständig abnehmen.*

Die Gleichung (2) zeigt nämlich, daß h und k immer dasselbe Vorzeichen haben müssen. Außerdem zeigt (1), daß

4) ω *eine ungerade Funktion in* φ *ist.*

Setzt man nun:

$$\omega = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \sin(s\varphi), \quad -\pi \leq \varphi < +\pi,$$

eine Entwicklung also, die in der Tat möglich ist, so hat man bekanntlich für a_s den Ausdruck:

$$a_s = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \omega \cdot \sin(s\varphi)\, d\varphi,$$

so daß eine partielle Integration mittelst (3) unmittelbar ergibt:

$$a_s = \frac{2(-1)^{s-1}}{s} + \frac{2}{s} J^s(se);$$

also findet man mittelst (T_8) folgende Entwicklung:

$$(4) \qquad \omega = \varphi + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} J^s(se) \sin(s\varphi), \quad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi,$$

eine Formel, welche von Bessel[1]) gefunden worden ist.

Für die in (3) gegebene abgeleitete Funktion findet man in ähnlicher Weise die Entwicklung:

$$(5) \qquad \frac{1}{1 - e\cos\omega} = 1 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} J^s(se) \cos(s\varphi), \quad -\pi < \varphi \leqq +\pi,$$

so daß die Annahme $\varphi = 0$ die weitere Formel:

$$(6) \qquad \frac{1}{1 - e} = 1 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} J^s(se),$$

ergibt, welche sicher anwendbar ist, falls $-1 < e < +1$ angenommen wird, wie es unmittelbar aus den vorhergehenden Bedingungen ersichtlich ist. Für $e \geqq 1$ bleibt die Formel (6) nicht mehr anwendbar, weil dann $J^s(se)$ mit s über jede Grenze hinaus wachsen muß[2]).

Diese Entwicklung scheint zuerst von Todhunter[3]) bemerkt zu sein, jedenfalls hat Todhunters Hinweis, wie Kapteyn[4]) selbst hervorhebt, Veranlassung zu dessen Verallgemeinerungen gegeben, welche wir später zu untersuchen haben.

§ 24. Die Funktionen $\mathrm{li}\, e^{-x}$, $C_i(x)$, $S_i(x)$ und die Integrale von Kramp und Fresnel.

Indem wir mit C, wie gewöhnlich, die Eulersche Konstante bezeichnen, definieren wir den *Integrallogarithmus* $\mathrm{li}\, e^{-x}$, den *Integralcosinus* $C_i(x)$ und den *Integralsinus* $S_i(x)$ folgendermaßen:

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 21.

2) Graf und Gubler: Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Heft I, p. 104; Bern 1898.

3) An elementary Treatise on Lamé's, Laplace's and Bessel's functions, p. 342; London 1875.

4) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10, p. 96; 1893.

$$(1)\qquad \operatorname{li} e^{-x} - \log x - C = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!\, s} \cdot x^s,$$

$$(2)\qquad C_i(x) - \log x - C = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!\, 2s} \cdot x^{2s},$$

$$(3)\qquad S_i(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!\,(2s+1)} \cdot x^{2s+1}$$

und finden dann aus § 2, (2) und § 4, (6) folgende Integralausdrücke:

$$(4)\qquad \operatorname{li} e^{-x} - \log x - C = \int_0^x \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx = \int_0^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(i^{\frac{3}{4}} H_1^{-\frac{1}{2}}(xi) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \right) dx,$$

$$(5)\qquad C_i(x) - \log x - C = \int_0^x \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = \int_0^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(J^{-\frac{1}{2}}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \right) dx,$$

$$(6)\qquad S_i(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J^{\frac{1}{2}}(x)\,dx.$$

Nahe verwandt mit den vorhergehenden Transcendenten sind die Integrale von Kramp[1]) $K(x)$ und von Fresnel[2]) $F_1(x)$ und $F_2(x)$, für welche wir folgende Definitionen anwenden:

$$(7)\qquad K(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!\,(2s+1)} \cdot x^{2s+1},$$

$$(8)\qquad F_1(x) = \int_0^x \cos(x^2)\,dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!\,(4s+1)} \cdot x^{4s+1},$$

$$(9)\qquad F_2(x) = \int_0^x \sin(x^2)\,dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!\,(4s+3)} \cdot x^{4s+3}.$$

Durch Cylinderfunktionen lassen sich diese drei Transcendenten folgendermaßen darstellen:

$$(10)\qquad \begin{cases} K(\sqrt{x}) = i^{\frac{3}{4}} \sqrt{\dfrac{\pi}{8}} \displaystyle\int_0^x H_1^{\frac{1}{2}}(ix)\,dx, \\[2ex] F_1(\sqrt{x}) = \sqrt{\dfrac{\pi}{8}} \displaystyle\int_0^x J^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx, \quad F_2(\sqrt{x}) = \sqrt{\dfrac{\pi}{8}} \displaystyle\int_0^x J^{\frac{1}{2}}(x)\,dx, \end{cases}$$

1) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Bd. 5, p. 434, man vergleiche auch pp. 406, 412, 433; 1826.

2) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres; 1798.

Die drei letzten Funktionen lassen sich auch sehr einfach durch $\Phi^{\frac{1}{2}}(x)$, $\Pi^{\frac{1}{2}}(x)$ und $X^{\frac{1}{2}}(x)$ ausdrücken; um dies für $K(x)$ einzusehen, setzen wir in dem Integrale:

$$\Phi^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\pi i^{\frac{1}{2}}} \cdot \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi$$

$$\sqrt{2xi} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varphi = t, \quad \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi = \frac{2\,dt}{\sqrt{2xi}}$$

und finden so unmittelbar die Formel:

(11) $$\Phi^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \frac{e^{ix}}{\pi i} \cdot K(\sqrt{2xi}),$$

so daß wir aus § 22, (18) folgende Entwicklung nach Cylinderfunktionen erhalten:

(12) $$\frac{2e^{-\frac{x^2}{2}} K(x)}{x} = J^0\left(\frac{x^2}{2i}\right) - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{4\,i^{-s}}{4s^2 - 1} J^s\left(\frac{x^2}{2i}\right).$$

Aus den Definitionen § 17, (12a) und (13a) finden wir nun weiter:

$$\Pi^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi\right),$$

$$X^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi - \right.$$

$$\left. - \cos x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi\right),$$

so daß die Substitution:

$$\sqrt{2x} \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varphi = t, \quad \cos \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot dt$$

folgende Formeln ergibt:

(13) $$\Pi^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{x}} \cdot \left(\cos x \, F_1(\sqrt{x}) + \sin x \, F_2(\sqrt{x})\right),$$

(14) $$X^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{x}} \cdot \left(\sin x \, F_1(\sqrt{x}) - \cos x \, F_2(\sqrt{x})\right),$$

woraus mittelst § 22, (16) und (17) folgende Entwicklungen nach Cylinderfunktionen hervorgehen:

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{1}{x} F_1(x) = \cos(x^2)\left(J^0(x^2) - 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{J^{2s}(x^2)}{16s^2-1}\right) + \\ \qquad + \sin(x^2)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(4s+2)J^{2s+1}(x^2)}{(4s+2)^2-1}, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{1}{x} F_2(x) = \sin(x^2)\left(J^0(x^2) - 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{J^{2s}(x^2)}{16s^2-1}\right) - \\ \qquad - \cos(x^2)\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(4s+2)J^{2s+1}(x^2)}{(4s+2)^2-1}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (11), (13) und (14) können wir weitere Entwicklungen für die drei Funktionen $K(x)$, $F_1(x)$ und $F_2(x)$ herleiten; wir ziehen es indessen vor, hier auf diese Frage nicht näher einzugehen, da wir später in § 34 dieselben Entwicklungen wiederfinden werden und zwar durch eine Methode, die uns erlaubt, ähnliche Formeln für $\operatorname{li} e^{-x}$, $C_i(x)$ und $S_i(x)$ zu geben.

Wir wollen am Schlusse noch eine andere Anwendung der Formel (11) geben; beachten wir nämlich, daß:

$$(17)\quad i^{\nu+\frac{1}{2}}\Phi^{\nu+\frac{1}{2}}(x) + i^{\nu-\frac{1}{2}}\Phi^{\nu-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos(\nu\varphi)\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi$$

ist, und daß man unmittelbar die andere Formel:

$$(18)\quad \int_0^\varphi e^{ix\cos\varphi}\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \frac{2e^{ix}}{\sqrt{2xi}} K\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{2xi}\right)$$

gewinnt oder, was dasselbe ist:

$$D_\varphi K\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{2xi}\right) = \frac{\sqrt{2xi}}{2e^{ix}} e^{ix\cos\varphi}\cos\frac{\varphi}{2},$$

so liefert eine partielle Integration folgende neue Formel:

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt{2xi}\right)\sin(\nu\varphi)\, d\varphi = -\frac{2\cos\nu\pi\cdot K(\sqrt{2xi})}{\nu\pi} + \\ \qquad + \sqrt{\frac{x}{2}}\cdot\frac{i^\nu}{\nu e^{ix}}\left(i\Phi^{\nu+\frac{1}{2}}(x) + \Phi^{\nu-\frac{1}{2}}(x)\right); \end{cases}$$

setzt man noch $x^2 : 2i$ für x, so gibt (19) folgende Entwicklung in eine Fouriersche Reihe:

$$(20)\quad K\left(x \sin \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{\pi} K(x) + \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{i^{s-\frac{1}{2}}}{s} \left(\Phi^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2i}\right) + i\Phi^{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2i}\right)\right) \sin(s\varphi),$$

wo man voraussetzen muß, daß $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$ ist.

Die andere Formel:

$$i^{\nu+\frac{1}{2}} \Phi^{\nu+\frac{1}{2}}(x) - i^{\nu-\frac{1}{2}} \Phi^{\nu-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \sin(\nu\varphi) \sin \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi$$

gibt auf ähnliche Weise folgende neue Entwicklung:

$$(21)\quad K\left(x \cos \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{i^{s-\frac{1}{2}}}{s} \left(\Phi^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2i}\right) - i\Phi^{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2i}\right)\right) \cos(s\varphi).$$

welche gültig ist, falls $-\pi < \varphi < +\pi$.

Für die beiden Entwicklungen (20) und (21) gilt noch der folgende bemerkenswerte Satz, den wir in § 26 allgemein beweisen werden:

Die Koeffizienten der zwei Fourierschen Reihen (20) *und* (21) *lassen sich sehr einfach durch die Funktion* $K(x)$ *selbst darstellen.*

Kapitel IV.

Unbestimmte Integrale und unendliche Reihen mit Cylinderfunktionen.

§ 25. Verallgemeinerung der Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen.

Es ist offenbar, daß alle diejenigen Funktionen, die wir im vorigen Kapitel untersucht haben, sehr einfache Spezialfälle der Lösungen folgender allgemeinen Fundamentalgleichungen sind:

$$(1)\qquad B^{\nu-1}(x) - B^{\nu+1}(x) = 2D_x B^\nu(x) + \frac{2}{x} f^\nu(x),$$

$$(2)\qquad B^{\nu-1}(x) + B^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} B^\nu(x) + \frac{2}{x} g^\nu(x),$$

wo $f^\nu(x)$ und $g^\nu(x)$ gegebene Funktionen in x und ν bedeuten. Die auffallende Form dieser bekannten Funktionen f und g wird sich durch die folgende Formel (8) rechtfertigen.

Bedeutet nun $B^\nu(x)$ eine *willkürliche* Lösung des Systemes (1), (2), so beweist man ohne Mühe die folgenden Sätze:

1) *Die allgemeinste Lösung von* (1), (2) *läßt sich immer folgendermaßen darstellen:*

$$B^\nu(x) + C^\nu(x),$$

wo $C^\nu(x)$ *die allgemeine Cylinderfunktion mit dem Argumente* x *und dem Parameter* ν *bedeutet.*

2) *Die Funktion* $B^{-\nu}(-x)$ *ist die Lösung eines Systemes, das man aus* (1), (2) *erhält, wenn man* $f^{-\nu}(-x)$ *und* $g^{-\nu}(-x)$ *für* $f^\nu(x)$ *und* $g^\nu(x)$ *einsetzt.*

3) *Wenn daher gleichzeitig* $f^\nu(x) - f^{-\nu}(x) = 0$ *und* $g^\nu(x) + g^{-\nu}(x) = 0$, *so ist die Differenz* $B^\nu(x) - B^{-\nu}(-x)$ *immer eine Cylinderfunktion mit dem Argumente* x *und dem Parameter* ν.

4) *Bedeutet* $a(\nu)$ *eine Funktion, so daß* $a(\nu+1) = -a(\nu)$ *ist, so wird* $a(\nu)B^{-\nu}(x)$ *eine Lösung des Systemes* (1), (2), *wenn nur* $f^\nu(x)$ *und* $g^\nu(x)$ *durch* $a(\nu)f^{-\nu}(x)$ *und* $-a(\nu)g^{-\nu}(x)$ *ersetzt werden; für die Funktion* $a(\nu)B^\nu(-x)$ *muß man dagegen* $a(\nu)f^\nu(-x)$ *und* $-a(\nu)g^\nu(-x)$ *statt* $f^\nu(x)$ *und* $g^\nu(x)$ *setzen.*

5) *Die Funktion* $B^{\nu+\varrho}(\alpha x)$, *wo* α *und* ϱ *willkürliche endliche Größen bedeuten, genügt einem System, das man aus* (1), (2) *erhält, wenn man für* $f^\nu(x)$, *bez.* $g^\nu(x)$ *folgende Ausdrücke setzt:*

$$\frac{1}{\alpha} f^{\nu+\varrho}(\alpha x) + x\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) D_x B^{\nu+\varrho}(\alpha x),$$

$$\frac{1}{\alpha} g^{\nu+\varrho}(\alpha x) + \left(\frac{\varrho+\nu}{\alpha} - \nu\right) B^{\nu+\varrho}(\alpha x).$$

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen haben wir die Möglichkeit der Auflösung des Systemes (1), (2) näher zu untersuchen. Durch Addition und Subtraktion der beiden ursprünglichen Gleichungen findet man beziehentlich:

$$(3)\qquad D_x B^\nu(x) = -\frac{\nu}{x} B^\nu(x) + B^{\nu-1}(x) - \frac{1}{x}\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right),$$

$$(4)\qquad D_x B^\nu(x) = \frac{\nu}{x} B^\nu(x) - B^{\nu+1}(x) - \frac{1}{x}\left(f^\nu(x) - g^\nu(x)\right),$$

Formeln, die wir ebensogut wie (1) und (2) als Definitionen der Funktionen $B^\nu(x)$ annehmen können; denn beide Systeme sind ja äquivalent.

Behandelt man nun weiter (3) und (4) nach der Methode, welche uns in § 1 zur Besselschen Differentialgleichung für die Cylinderfunktionen geführt hat, so findet man hier für die B-Funktionen folgende lineare, nicht homogene Gleichung:

$$(5) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x}\, y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{1}{x}\, \omega^\nu(x),$$

in der man für die Funktion $\omega^\nu(x)$ folgende beide Ausdrücke gewinnt:

$$(6) \quad \omega^\nu(x) = \frac{\nu}{x}\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) - D_x\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) - \left(f^{\nu-1}(x) - g^{\nu-1}(x)\right),$$

$$(7) \quad \omega^\nu(x) = -\frac{\nu}{x}\left(f^\nu(x) - g^\nu(x)\right) - D_x\left(f^\nu(x) - g^\nu(x)\right) + \left(f^{\nu+1}(x) + g^{\nu+1}(x)\right),$$

je nachdem man von (3) oder (4) ausgeht.

Die Formeln (6) und (7) zeigen aber, daß die Funktionen $f^\nu(x)$ und $g^\nu(x)$ nicht ganz willkürlich gegeben sein dürfen; denn, falls die Fundamentalgleichungen (1) und (2) wirklich Lösungen haben können, müssen jedenfalls die beiden Ausdrücke (6) und (7) identisch sein, d. h. f und g müssen folgender Bedingung Genüge leisten:

$$(8) \quad g^{\nu-1}(x) - g^{\nu+1}(x) - 2 D_x g^\nu(x) = f^{\nu-1}(x) + f^{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} f^\nu(x).$$

Die Übereinstimmung der Ausdrücke, die in dieser Formel auftreten, mit denjenigen in den Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen ist offenbar; um sie aufrecht erhalten zu können, haben wir eben die etwas auffallende Form der gegebenen Funktionen in (1) und (2) gewählt.

Im allgemeinen ist diese *notwendige* Bedingung (8) auch *hinreichend* für die Möglichkeit einer Auflösung der Gleichungen (1) und (2); ein Zweifel kann überhaupt nur dann eintreten, wenn sich die Funktionen f und g in Reihen entwickeln lassen, die beide von folgender Form sind:

$$x^{\pm\nu}(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots).$$

Diese Frage interessiert uns indessen hier nicht, weil wir nur voraussetzen wollen, daß die Funktion $\omega^\nu(x)$ gegeben ist, so daß wir die Funktionen B, f und g nur so zu bestimmen haben, daß die Gleichungen (1) und (2) durch sie befriedigt werden. Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß man einen Ausdruck für die B-Funktionen finden kann, indem man in (5):

$$y = z J^\nu(x)$$

substituiert. Wendet man nämlich die Lommelsche Formel § 16, (2) an, so findet man folgende Funktion:

$$(9) \qquad y = \frac{\pi}{2}\, Y^\nu(x) \int \omega^\nu(x) J^\nu(x)\, dx - \frac{\pi}{2}\, J^\nu(x) \int \omega^\nu(x)\, Y^\nu(x)\, dx$$

als partikuläres Integral von (5).

Um die Bestimmung von $f^\nu(x)$ und $g^\nu(x)$ durchzuführen, setzen wir:

(10) $$y_{\nu-1} = \frac{1}{x}\Big(f^\nu(x) + g^\nu(x)\Big), \quad z_{\nu+1} = \frac{1}{x}\Big(f^\nu(x) - g^\nu(x)\Big),$$

so daß die Gleichungen (6) und (7) sich auch folgendermaßen schreiben lassen:

$$\omega^\nu(x) = (\nu - 1)y_{\nu-1} - xD_x y_{\nu-1} - xz_\nu,$$
$$\omega^\nu(x) = -(\nu + 1)z_{\nu+1} - xD_x z_{\nu+1} + xy_\nu.$$

Dieselbe Methode, durch welche wir die Gleichung (5) aus (1) und (2) hergeleitet haben, gibt hier folgende zu (5) analoge Differentialgleichungen:

(11) $$y_\nu^{(2)} + \frac{1}{x}y_\nu^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y_\nu = \frac{1}{x}\left(-\frac{\nu}{x}\omega^{\nu+1}(x) - D_x\omega^{\nu+1}(x) + \omega^\nu(x)\right),$$

(12) $$z_\nu^{(2)} + \frac{1}{x}z_\nu^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)z_\nu = \frac{1}{x}\left(\frac{\nu}{x}\omega^{\nu-1}(x) - D_x\omega^{\nu-1}(x) - \omega^\nu(x)\right).$$

Setzt man noch

$$B^\nu(x) = a(\nu)J^\nu(x) + b(\nu)Y^\nu(x),$$

wo $a(\nu)$ und $b(\nu)$ ganz willkürliche Funktionen in ν bedeuten, so findet man für die zugehörigen Funktionen y_ν und z_ν, wie unmittelbar aus (11) und (12) erhellt, genau die Besselsche Differentialgleichung; damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Setzt man voraus, daß die Funktion $\omega^\nu(x)$ *gegeben ist, so wird ein willkürliches Integral von* (5) *immer einem Systeme wie* (1), (2) *genügen, falls nur die zugehörigen Funktionen* f *und* g *aus passenden Integralen der Gleichungen* (11) *und* (12) *gebildet werden.*

Dieser Satz, den wir in den zwei folgenden Kapiteln anwenden wollen, ist fundamental für die Untersuchungen über unbestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen.

§ 26. Reduktion von $B^{\nu \pm n}(x)$. Anwendung auf $R^{\nu,n}(x)$.

Es sei nun $B^\nu(x)$ eine willkürliche Lösung der Gleichungen (1) und (2) des § 25; dann muß die Funktion:

$$G^\nu(x) = C^{\nu-1}(x)B^{\nu+\varrho}(\alpha x) - C^\nu(x)B^{\nu+\varrho-1}(\alpha x),$$

wo die C Cylinderfunktionen bezeichnen, während α und ϱ endliche Größen bedeuten, dem Satze 5) des § 25 zufolge folgender Bedingung genügen:

(1) $$G^{\nu+1}(x) = G^\nu(x) + \left[\left(\frac{2(\nu+\varrho)}{\alpha x} - \frac{2\nu}{x}\right)B^{\nu+\varrho}(\alpha x) + \frac{2}{\alpha x}g^{\nu+\varrho}(\alpha x)\right]C^\nu(x);$$

setzt man also $\varrho - \nu$ für ϱ und y für αx, so findet man durch Wiederholung der Formel (1) die allgemeinere:

$$(2)\quad G^{\nu+n}(x) = G^{\nu}(x) + 2\sum_{s=0}^{s=n-1}\left[\left(\frac{\varrho+s}{y} - \frac{\nu+s}{x}\right)B^{\varrho+s}(y) + \frac{1}{y}\,g^{\varrho+s}(y)\right]C^{\nu+s}(x),$$

wo also n eine positive ganze Zahl bedeutet.

Betrachtet man nun die zwei Formeln, die aus (2) entstehen, wenn man J und dann Y für C einsetzt, so liefert die allgemeine Lommelsche Fundamentalformel § 7, (4) folgende allgemeine Reduktionsformel:

$$(3)\quad \begin{cases} B^{\varrho+n}(y) = R^{\nu-1,n}(x)B^{\varrho}(y) - R^{\nu,n-1}(x)B^{\varrho-1}(y) + \\ \qquad + \frac{2}{y}\sum_{s=0}^{s=n-1} g^{\varrho+s}(y)R^{\nu+s,n-s-1}(x) + \\ \qquad + 2\sum_{s=0}^{s=n-1}\left(\frac{\varrho+s}{y} - \frac{\nu+s}{x}\right)R^{\nu+s,n-s-1}(x)\,B^{\varrho+s}(y), \end{cases}$$

deren Form wegen der vier Variabeln sehr merkwürdig ist, und aus welcher man viele andere herleiten kann, wie die folgenden vier Spezialfälle andeuten mögen.

1) $x = y$, $\varrho = \nu$. Man findet hier die eigentliche Reduktionsformel:

$$(4)\quad \begin{cases} B^{\nu+n}(x) = R^{\nu-1,n}(x)\,B^{\nu}(x) - R^{\nu,n-1}(x)\,B^{\nu-1}(x) + \\ \qquad + \frac{2}{x}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1} g^{\nu+s}(x)\,R^{\nu+s,n-s-1}(x), \end{cases}$$

welche uns unmittelbar erlaubt, den in § 24 erwähnten Satz über die Koeffizienten der Fourierschen Reihenentwicklung für das Krampsche Integral $K(x)$ zu beweisen. Es handelt sich nämlich dort um die Bestimmung von $\Phi^{s+\frac{1}{2}}(x)$, wo s eine positive ganze Zahl bedeutet; erinnert man sich aber nun, daß:

$$\Phi^{-\frac{1}{2}}(x) = i\cdot\Phi^{\frac{1}{2}}(x)$$

ist, so gibt (4) mittelst § 19, (3a) die Rekursionsformel:

$$(5)\quad \Phi^{s+\frac{1}{2}}(x) = \left(R^{-\frac{1}{2},s}(x) - iR^{\frac{1}{2},s-1}(x)\right)\Phi^{\frac{1}{2}}(x) - \frac{2e^{-ix}}{\pi\sqrt{i}}\cdot\sum_{p=0}^{p=s-1} i^p R^{p+\frac{1}{2},s-p-1}(x),$$

und damit ist vermöge § 24, (11) der Satz vollständig bewiesen.

2) $x = \infty$. Die Definition § 7, (2) für das Lommelsche Polynom ergibt weiter, daß:

$$R^{\nu,n}(\infty) = \cos\frac{n\pi}{2}$$

sein muß; man findet also aus (3) folgende weitere Formel:

$$(6)\quad \begin{cases} B^{\varrho+n}(y) = \cos\frac{n\pi}{2} B^{\varrho}(y) - \sin\frac{n\pi}{2} B^{\varrho-1}(y) + \\ \qquad + \frac{2}{y}\cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \sin\frac{n\pi}{2}\cdot \Big((\varrho+s)B^{\varrho+s}(y) + g^{\varrho+s}(y)\Big). \end{cases}$$

3) Setzt man in (3) $\nu = 1$ und $n-1$ für n, so findet man den Satz:

Das allgemeine Integral der nicht homogenen linearen Differenzengleichung:

$$(7)\qquad B^{n-1}(x) + B^{n+1}(x) = \frac{2n}{x} B^n(x) + \frac{2}{x} g^n(x),$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, wird durch die Funktion:

$$(8)\quad \begin{cases} B^n(x) = A(x)\, R^{0,n-1}(x) - B(x) R^{1,n-2}(x) + \\ \qquad + \frac{2}{x}\cdot \sum_{s=0}^{s=n-2} g^{s+1}(x) R^{s+1,n-s-2}(x) \end{cases}$$

dargestellt, wo $A(x)$ und $B(x)$ in x willkürliche Funktionen bedeuten.

Betrachtet man zum Beispiel das Schläflische Polynom $S^n(x)$, so hat man:

$$A(x) = S^1(x) = \frac{2}{x}, \quad B(x) = S^0(x) = 0, \quad g^n(x) = 2\cos^2\frac{n\pi}{2};$$

also ergibt sich die Formel:

$$(9)\qquad S^n(x) = \frac{2}{x} R^{0,n-1}(x) + \frac{4}{x}\cdot \sum_{s=0}^{s=n-2} \sin^2\frac{s\pi}{2}\cdot R^{s+1,n-s-2}(x),$$

welche auch durch andere Methoden, so von Graf[1]), gewonnen worden ist. Auf ähnliche Weise findet man die analoge Formel:

$$(10)\qquad e^{ix}\mathfrak{S}^n(x) = \frac{2}{x} R^{0,n-1}(x) + \frac{4}{x}\cdot \sum_{s=0}^{s=n-2} i^s R^{s+1,n-s-2}(x).$$

4) $B^{\varrho}(y) = C^{\varrho}(y)$. Der allgemeine Satz, den wir in § 13 bewiesen haben, läßt sich dann auf den so erhaltenen Spezialfall von (3) anwenden; man findet so die merkwürdige Formel:

---

1) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Heft II, p. 41; 1900.

$$(11)\quad R^{\nu-1,n}(x) - R^{\varrho-1,n}(y) = 2 \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \left(\frac{\nu+s}{x} - \frac{\varrho+s}{y} \right) R^{\nu-1,s}(x) R^{\varrho+s,n-s-1}(y),$$

aus welcher man eine große Menge anderer herleiten kann.

Wir beschränken uns hier auf die beiden Annahmen $x = \infty$, $y = \infty$ und finden demnach für das Lommelsche Polynom folgende Reduktionsformeln:

$$(12)\quad R^{\varrho,n}(y) = \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{y} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (\varrho+s+1) \cos\frac{s\pi}{2} \cdot R^{\varrho+s+1,n-s-1}(y),$$

$$(13)\quad R^{\nu,n}(x) = \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{x} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (\nu+s+1) \sin\frac{n-s}{2}\pi \cdot R^{\nu,s}(x),$$

während die Annahme $y = -x$ noch die weitere Formel liefert:

$$(14)\quad \begin{cases} R^{\varrho,n}(x) - (-1)^n R^{\nu,n}(x) = \\ \quad = -\dfrac{2}{x} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{n-s} (\nu+\varrho+2s+2) R^{\nu,s}(x) R^{\varrho+s+1,n-s-1}(x). \end{cases}$$

§ 27. Unbestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen gehen wir nunmehr zur Anwendung unserer B-Funktionen auf Cylinderfunktionen über. Als erste Anwendung setzen wir in der allgemeinen Formel § 26, (1) $\varrho = 0$, $\alpha = 1$ und finden so für die Funktion:

$$(1)\quad G^\nu(x) = \frac{x}{2}\left(B^{\nu-1}(x) C^\nu(x) - B^\nu(x) C^{\nu-1}(x)\right)$$

die Formeln:

$$(2)\quad G^\nu(x) = G^{\nu+1}(x) + g^\nu(x) C^\nu(x),$$

$$(3)\quad G^\nu(x) = G^{\nu+n+1}(x) + \sum_{s=0}^{s=n} g^{\nu+s}(x) C^{\nu+s}(x),$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeuten muß.

Setzt man nun voraus, daß der Grenzwert:

$$(4)\quad F^\nu(x) = \lim_{n=+\infty} G^{\nu+n}(x)$$

existiert und eine bestimmte, endliche, in ν periodische Funktion darstellt, so findet man aus (3), wenn man n unbegrenzt wachsen läßt, folgende Reihenentwicklung nach Cylinderfunktionen:

$$(5)\quad \frac{x}{2}\left(B^{\nu-1}(x) C^\nu(x) - B^\nu(x) C^{\nu-1}(x)\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} g^{\nu+s}(x) C^{\nu+s}(x) + F^\nu(x).$$

Es leuchtet ein, daß man in dieser Formel (5) statt der Cylinder funktion eine willkürliche Lösung ihrer zweiten Fundamentalgleichung setzen darf, und es ist dann möglich, diese Lösung so zu wählen, daß die Funktion $F^\nu(x)$ verschwindet.

Will man umgekehrt die Reihe rechter Hand in (5) für eine gegebene Funktion $g^\nu(x)$ summieren, so muß man die Differenzengleichung § 25, (2) auflösen, um die Funktion B linker Hand in (5) zu bestimmen. Indessen ist es gegenwärtig noch nicht bekannt, unter welchen Bedingungen diese nicht homogene lineare Differenzengleichung wirklich eine Lösung hat, und wir können hier nicht auf eine nähere Untersuchung dieser Frage eingehen.

Differentiiert man aber die Funktion $G^\nu(x)$ nach x und drückt man mittelst § 1, (3), (4) und § 25, (3), (4) die Differentialquotienten der Funktionen B und C so aus, daß man nur die Parameter ν und $\nu - 1$ einführt, so findet man:

$$2 D_x G^\nu(x) = C^{\nu-1}(x)\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) - C^\nu(x)\left(f^{\nu-1}(x) - g^{\nu-1}(x)\right),$$

eine Formel, welche sich mittelst der Identität:

$$C^{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} C^\nu(x) + D_x C^\nu(x)$$

auch, wie folgt, schreiben läßt:

$$2 D_x G^\nu(x) = \left[\left(\frac{\nu}{x}\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) - \left(f^{\nu-1}(x) - g^{\nu-1}(x)\right)\right)\right] C^\nu(x) + \\ + \left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) D_x C^\nu(x),$$

so daß die Formel § 25, (6) endlich:

$$2 D_x G^\nu(x) = \omega^\nu(x)\, C^\nu(x) + D_x\Big(C^\nu(x)\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right)\Big)$$

gibt, und man so die einfache Formel:

$$(6)\quad \begin{cases} \int \omega^\nu(x)\, C^\nu(x)\, dx = \\ \qquad = x\Big(C^\nu(x) B^{\nu-1}(x) - C^{\nu-1}(x) B^\nu(x)\Big) - \Big(f^\nu(x) + g^\nu(x)\Big) C^\nu(x) \end{cases}$$

findet, wo die Integrationskonstante, die eine arbiträre Funktion von ν sein muß, weggelassen ist.

Lommel[1]) hat schon einige Spezialfälle der Formel (6) gegeben.

Will man das Integral linker Hand in (6) allein durch die Funktionen B und C ausdrücken, so kann man mittelst § 25, (3) die Funktionen f und g eliminieren; wendet man außerdem die

---

1) Mathematische Annalen Bd. 14; 1879.

zweite Fundamentalformel der Cylinderfunktionen an, so erhält man folgende Formel:

$$(7) \qquad \int\limits^{\bullet}_{\bullet} \omega^{\nu}(x)\, C^{\nu}(x)\, dx = x\, C^{\nu+1}(x)\, B^{\nu}(x) + x\, C^{\nu}(x)\, D_x B^{\nu}(x),$$

die in etwas anderer Form von Sonin[1]) gegeben worden ist.

Nimmt man nun weiter an, daß die Formel (5) anwendbar ist, so findet man aus (6) folgende Reihenentwicklung nach Cylinderfunktionen:

$$(8) \int\limits^{\bullet}_{\bullet} \omega^{\nu}(x)\, C^{\nu}(x)\, dx = 2\, F^{\nu}(x) + 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} g^{\nu+s}(x)\, C^{\nu+s}(x) - (f^{\nu}(x) + g^{\nu}(x))\, C^{\nu}(x),$$

eine Formel, von welcher schon Lommel[2]) einige Spezialfälle angegeben hat.

Der Weg, den wir zu folgen haben, um das Integral linker Hand in (6) und (7) zu bestimmen, wenn die ω-Funktion gegeben ist, ist durch die Entwicklungen des § 25 bezeichnet.

§ 28. Herleitung eines Integrales mit zwei Cylinderfunktionen.

Ehe wir zu allgemeineren Anwendungen der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln schreiten, wollen wir noch ein spezielles Integral herleiten, welches in der Theorie der Nullstellen einer Cylinderfunktion eine sehr wichtige Rolle spielt und gewöhnlich nach anderen Methoden dargestellt wird.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Funktion $C_1^{\nu+\varrho}(\beta x)$, wo C_1 eine willkürliche Cylinderfunktion ist, während ϱ und β endliche Größen bedeuten, einem Gleichungssystem von der Form § 25, (1), (2) Genüge leisten muß, in dem man:

$$f^{\nu}(x) = x\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) D_x C^{\nu+\varrho}(\beta x), \quad g^{\nu}(x) = \left(\frac{\nu+\varrho}{\beta} - \nu\right) C^{\nu+\varrho}(\beta x),$$

$$\omega^{\nu}(x) = \left((1-\beta^2)\, x + \frac{(\nu+\varrho)^2 - \nu^2}{x^2}\right) C^{\nu+\varrho}(\beta x)$$

zu setzen hat; der Ausdruck für die ω-Funktion läßt sich am einfachsten mittelst der Besselschen Differentialgleichung herleiten. Setzt man nun $\varrho - \nu$ für ϱ, αx für x und $\beta : \alpha$ für β, so findet man aus § 27, (6) die speziellere Formel:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 30; 1880.

2) Mathematische Annalen Bd. 16; 1880.

$$
(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\int\left((\alpha^2-\beta^2)x - \frac{\nu^2-\varrho^2}{x}\right) C_1^\varrho(\beta x)\, C^\nu(\alpha x)\, dx = \\ \qquad = \beta x\, C^\nu(\alpha x)\, C_1^{\varrho-1}(\beta x) - \alpha x\, C^{\nu-1}(\alpha x)\, C_1^\varrho(\beta x) - \\ \qquad\qquad - (\varrho-\nu)\, C^\nu(\alpha x)\, C_1^\varrho(\beta x), \end{cases}
$$

die von Lommel[1]) gefunden worden ist und aus welcher wir eine Reihe anderer Formeln herzuleiten haben:

1) $\varrho = \nu$; man findet:

$$
(2) \quad \begin{cases} (\alpha^2-\beta^2)\displaystyle\int x\, C_1^\nu(\beta x)\, C^\nu(\alpha x)\, dx = \\ \qquad = \beta x\, C^\nu(\alpha x)\, C_1^{\nu-1}(\beta x) - \alpha x\, C^{\nu-1}(\alpha x)\, C_1^\nu(\beta x), \end{cases}
$$

eine Formel, die jedoch für $\beta = \pm\,\alpha$ nicht anwendbar ist; differentiiert man sie aber nach α und setzt man noch $\beta = \alpha$, $C_1 = C$, so findet man ohne Mühe, daß:

$$
(3) \quad \int x\, C^\nu(\alpha x)\, C^\nu(\alpha x)\, dx = \frac{x^2}{2}\left(C^\nu(\alpha x)\, C^\nu(\alpha x) - C^{\nu-1}(\alpha x)\, C^{\nu+1}(\alpha x)\right)
$$

sein muß.

2) $\alpha = \beta$; man findet hier:

$$
(4) \quad (\varrho^2-\nu^2)\int \frac{C^\nu(\alpha x)\, C_1^\varrho(\alpha x)}{x}\, dx = \alpha x\left(C^\nu(\alpha x)\, C_1^{\varrho-1}(\alpha x) - C^{\nu-1}(\alpha x)\, C_1^\varrho(\alpha x)\right),
$$

eine Formel, die hinwiederum für $\varrho = \pm\,\nu$ unbrauchbar wird. Differentiiert man sie aber nach ϱ und setzt man dann $\varrho = \nu$, so findet man mittelst § 15, (1) und § 11, (1), daß

$$
(5) \quad \begin{cases} 2\nu\displaystyle\int \frac{C^\nu(\alpha x)\, C_1^\nu(\alpha x)}{x}\, dx = \alpha x\,(C^\nu(\alpha x)\, \mathfrak{C}_1^{\nu-1}(\alpha x) - C^{\nu-1}(\alpha x)\, \mathfrak{C}_1^\nu(\alpha x)) - \\ \qquad - 2\Delta \log x - C^\nu(\alpha x)\, C_1^\nu(\alpha x) \end{cases}
$$

sein muß, so daß man noch den Spezialfall $\nu = 0$ zu untersuchen hat.

Wendet man den Satz des § 15 an, so findet man folgenden neuen Satz:

Das Integral linker Hand in (5), *wo* ν *eine positive ganze Zahl bedeutet, läßt sich unter endlicher Form durch Cylinderfunktionen und elementare Funktionen ausdrücken.*

Dies ist für $\nu = 0$ offenbar nicht mehr zutreffend, weil die dann notwendige Differentiation nach ν zu neuen Funktionen führen muß.

Wir kehren nun zu den Formeln (2) und (3) zurück, um die dort vorkommenden Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 zu berechnen. Falls keine der Cylinderfunktionen

1) Mathematische Annalen Bd. 14, p. 523; 1879.

$$C^\nu(x) = a(\nu) J^\nu(x) + b(\nu) Y^\nu(x)$$
$$C_1^\nu(x) = a_1(\nu) J^\nu(x) + b_1(\nu) Y^\nu(x),$$

von der ersten Art ist, so erfordert die Konvergenz des Integrales an der unteren Grenze, daß $1 > \Re(\nu) > -1$ ist; ist dagegen wenigstens eine dieser Funktionen von der ersten Art, so ist es hinlänglich, daß $\Re(\nu) > -1$ ist. Eine direkte Ausrechnung und eine einfache Umformung der Formel (2) liefert dann ohne Schwierigkeit die andere:

$$(6)\quad \begin{cases} (\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 x C^\nu(\alpha x) C_1^\nu(\beta x)\, dx = \alpha C^{\nu+1}(\alpha) C_1^\nu(\beta) - \beta C^\nu(\alpha) C_1^{\nu+1}(\beta) + \\ \qquad + \frac{2}{\pi}\left(a(\nu) b_1(\nu)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu - a_1(\nu) b(\nu)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}\right) - \\ \qquad - b(\nu) b_1(\nu)\frac{2\cos\nu\pi}{\pi\sin\nu\pi}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}\right), \end{cases}$$

und die Annahme $\nu = 0$ ergibt dann weiter:

$$(7)\quad \begin{cases} (\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 x C^0(\alpha x) C_1^0(\beta x)\, dx = \alpha C^1(\alpha) C_1^0(\beta) - \beta C^0(\alpha) C_1^1(\beta) - \\ \qquad - \frac{4 b b_1}{\pi^2}\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{2}{\pi}\Delta. \end{cases}$$

Aus der Formel (3) findet man in ähnlicher Weise:

$$(8)\quad \begin{cases} \int_0^1 x C^\nu(\alpha x) C^\nu(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2}\left(C^\nu(\alpha) C^\nu(\alpha) - C^{\nu-1}(\alpha) C^{\nu+1}(\alpha)\right) \\ \qquad + \frac{4\nu a(\nu) b(\nu)}{\pi\alpha^2} - \frac{2\left(b(\nu)\right)^2 \nu\cos\nu\pi}{(1-\nu)\pi^2(\Gamma(\nu))^2\alpha^2}, \end{cases}$$

$$(9)\quad \int_0^1 x C^0(\alpha x) C^0(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\left(C^0(\alpha)\right)^2 + \left(C^1(\alpha)\right)^2\right).$$

Diese Formeln werden uns in den Untersuchungen über die Nullstellen der Cylinderfunktionen sehr nützlich sein; für $C = C_1 = Y$ oder $C = J$, $C_1 = Y$ ist die Formel (7) von Schafheitlin[1]) aufgestellt worden.

Die Formel (6) läßt sich leicht generalisieren, indem man zu wiederholten Malen nach α^2 differentiiert und die allgemeine Differentiationsformel § 10, (5) anwendet; die so erhaltene allgemeine Formel wird indes so lang, daß wir es vorziehen, sie hier nicht niederzuschreiben.

---

1) Archiv der Mathematik und Physik (3) Bd. 1, p. 135; 1901.

Kapitel V.

Die Lommelsche Funktion $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

§ 29. Fundamentaleigenschaften von $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

Für die Anwendung der in § 25 gegebenen Theorie ist es notwendig zu bemerken, daß, wenn man die gegebene ω-Funktion mit einem Faktor multipliziert, welcher von x unabhängig, aber eine Funktion von ν ist, die gesuchte B-Funktion offenbar mit demselben Faktor multipliziert wird, so daß die zwei Fundamentalgleichungen, welchen diese Funktion genügen muß, gänzlich geändert werden. Es ist also in jedem Falle, wenn die ω-Funktion gegeben ist, eine Hauptsache, einen solchen Faktor zu bestimmen, daß die Fundamentalgleichungen die möglichst einfache Form erhalten.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir diejenige B-Funktion suchen, für welche die zugehörige ω-Funktion eine einzelne Potenz von x ist; wenn der Exponent dieser Potenz gleich $\varrho - 1$ angenommen wird, wollen wir die einfachste der zugehörigen B-Funktionen mit $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ bezeichnen.

Um die bequemste Form dieser ω-Funktion zu bestimmen, bemerken wir, daß:

$$(1) \qquad \Delta_\nu\left(\left(\frac{x}{2}\right)^\varrho\right) = \frac{\varrho+\nu}{2}\cdot\frac{\varrho-\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-2} + \left(\frac{x}{2}\right)^\varrho$$

sein muß, wo wir der Kürze halber:

$$\Delta_\nu(y) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y$$

gesetzt haben; nun veranlaßt uns (1) offenbar, natürlich:

$$(2) \qquad \omega^\nu(x) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1} = \omega^{\nu,\varrho}(x)$$

zu setzen, denn die oben erwähnte Formel gibt dann unmittelbar:

$$\Delta_\nu\left(\frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x)\right) = \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x) - \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho}(x),$$

so daß wir für die Π-Funktion als erste Fundamentaleigenschaft finden:

$$(3) \qquad \Pi^{\nu,\varrho+2}(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x),$$

oder, noch allgemeiner, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$(4)\qquad \Pi^{\nu,\varrho+2n}(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{1}{x}\cdot\sum_{s=1}^{s=n}\omega^{\nu,\varrho+2s}(x);$$

setzt man weiterhin in dieser Formel $\varrho - 2n$ für ϱ, so findet man die analoge Reduktionsformel:

$$(5)\qquad \Pi^{\nu,\varrho-2n}(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(x) - \frac{1}{x}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\omega^{\nu,\varrho-2s}(x),$$

so daß man, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, immer eine Formel von folgender Form findet:

$$(6)\qquad \Pi^{\nu,\varrho+2n}(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(x) + A^{\nu,\varrho,n}(x),$$

wo die A-Funktion eine endliche Reihe bedeutet, welche man unmittelbar aus (4) und (5) bilden kann.

Die Formel (4) erlaubt uns noch, den expliziten Ausdruck für $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ zu finden; um ihn zu gewinnen, braucht man nämlich nur die positive ganze Zahl n über alle Grenzen hinaus wachsen zu lassen; die dadurch erhaltene unendliche Reihe rechter Hand wird für alle endlichen Werte von x, ν und ϱ, vielleicht nur $x = 0$ ausgeschlossen, unbedingt konvergent, und wir finden somit:

$$(7)\qquad \Pi^{\nu,\varrho}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)},$$

denn diese Funktion muß offenbar gegen die Null konvergieren, wenn $\Re(\varrho)$ unbegrenzt wächst und positiv ist.

Um nun die zugehörigen Funktionen f und g zu bestimmen, berechnet man die Ausdrücke rechter Hand in den Formeln (11) und (12) des § 25 und findet dann als partikuläre Integrale dieser Differentialgleichungen die Funktionen:

$$(8)\qquad \frac{1}{x}\left(f^\nu(x) - g^\nu(x)\right) = \Pi^{\nu+1,\varrho-1}(x) - \Pi^{\nu+1,\varrho}(x),$$

$$(8\text{a})\qquad \frac{1}{x}\left(f^\nu(x) + g^\nu(x)\right) = \Pi^{\nu-1,\varrho}(x) - \Pi^{\nu-1,\varrho-1}(x),$$

so daß die Fundamentalformeln § 25, (1), (2), wenn man vorerst noch $\varrho + 1$ für ϱ gesetzt hat, hier ergeben:

$$(9)\qquad \Pi^{\nu-1,\varrho}(x) - \Pi^{\nu+1,\varrho}(x) = 2D_x\Pi^{\nu,\varrho+1}(x),$$

$$(9\text{a})\qquad \Pi^{\nu-1,\varrho}(x) + \Pi^{\nu+1,\varrho}(x) = \frac{2\nu}{x}\Pi^{\nu,\varrho+1}(x);$$

denn diese Formeln zeigen deutlich, daß die Ausdrücke (8), (8a)

nicht durch Hinzufügung gewisser Cylinderfunktionen modifiziert werden dürfen.

Setzt man nunmehr in (9), (9a) noch einmal $\varrho + 1$ für ϱ, so findet man mittels (3) folgende weiteren Fundamentalgleichungen:

$$\Pi^{\nu-1,\varrho+1}(x) - \Pi^{\nu+1,\varrho+1}(x) = 2D_x\Pi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{2\varrho}{x^2}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x), \tag{10}$$

$$\Pi^{\nu-1,\varrho+1}(x) + \Pi^{\nu+1,\varrho+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\Pi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{2\nu}{x^2}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x); \tag{10a}$$

führt man nun noch die Funktion:

$$\Psi^{\nu,\varrho}(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(x) + \Pi^{\nu,\varrho+1}(x) \tag{11}$$

ein, so findet man für dieselbe aus (9) und (10) folgende einfache Fundamentalformeln von derselben Form wie (1) und (2) in § 25:

$$\Psi^{\nu-1,\varrho}(x) - \Psi^{\nu+1,\varrho}(x) = 2D_x\Psi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{2\varrho}{x^2}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x), \tag{12}$$

$$\Psi^{\nu-1,\varrho}(x) + \Psi^{\nu+1,\varrho}(x) = \frac{2\nu}{x}\Psi^{\nu,\varrho}(x) + \frac{2\nu}{x^2}\,\omega^{\nu,\varrho+2}(x). \tag{12a}$$

Weiter ist zu bemerken, daß die Funktion $\Pi^{\nu,\nu+\varrho}(x)$ Formeln von derselben Form wie (12) genügt; man findet nämlich aus (9) mit Zuhilfenahme von (3), daß:

$$\left\{\begin{aligned}&\Pi^{\nu-1,\nu+\varrho-1}(x) - \Pi^{\nu+1,\nu+\varrho+1}(x) = \\ &\qquad = 2D_x\Pi^{\nu,\nu+\varrho}(x) - \frac{1}{x}\,\omega^{\nu+1,\nu+\varrho+1}(x),\end{aligned}\right. \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\Pi^{\nu-1,\nu+\varrho-1}(x) + \Pi^{\nu+1,\nu+\varrho+1}(x) = \\ &\qquad = \frac{2\nu}{x}\,\Pi^{\nu,\nu+\varrho}(x) + \frac{1}{x}\,\omega^{\nu+1,\nu+\varrho+1}(x)\end{aligned}\right. \tag{13a}$$

sein muß.

Die Funktion $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ ist, von einem von x unabhängigen Faktor abgesehen, von Lommel[1]) eingeführt worden; man findet nämlich mit der Lommelschen Bezeichnung:

$$\Pi^{\nu,\varrho}(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{2^\varrho\,\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}\cdot s^{\varrho-1,\nu}(x); \tag{14}$$

nun ist es aber offenbar, daß dieser von x unabhängige Faktor den Fundamentalformeln unserer Funktion ihre einfache Gestalt verliehen hat; es ist daher auch nicht zu verwundern, wenn Lommel diese Formeln nicht gekannt hat.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 9, p. 435; 1876.

§ 30. Spezialfälle der Lommelschen Funktion.

Es ist offenbar, daß $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ eine große Menge der früher betrachteten Funktionen als Spezialfälle enthalten muß, von denen wir hier die wichtigsten mitteilen wollen.

1) $\varrho = \pm \nu - 2n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; man findet:

$$(1) \qquad \Pi^{\nu,\nu-2n}(x) = J^{\nu}(x), \quad \Pi^{\nu,-\nu-2n}(x) = \cos \nu\pi \cdot J^{-\nu}(x);$$

wenn nämlich n größer als Null vorausgesetzt wird, verschwinden die n ersten Terme der Reihe § 29, (7) vermöge der Gammafunktion im Nenner, und für $n = 0$ sind die beiden Formeln einleuchtend.

Weiter findet man aus § 29, (6):

$$(2) \qquad \begin{cases} \Pi^{\nu,\nu+2n}(x) = J^{\nu}(x) - A^{\nu,n}(x), \\ \Pi^{\nu,-\nu+2n}(x) = \cos \nu\pi \left(J^{-\nu}(x) - A^{-\nu,n}(x)\right), \end{cases}$$

wo wir der Kürze halber:

$$(3) \qquad A^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}$$

gesetzt haben, so daß diese A-Funktion nichts anderes ist als die Summe der n ersten Terme der Reihenentwicklung für $J^{\nu}(x)$.

2) $\varrho = 0$, $\varrho = 1$; man findet hier die Funktionen von Poisson und Anger, nämlich:

$$(4) \qquad \Pi^{\nu,0}(x) = \Pi^{\nu}(x), \quad \Pi^{\nu,1}(x) = \mathsf{X}^{\nu}(x).$$

3) $\varrho = 2n + 1 \pm \nu$, wo n eine ganze Zahl bedeutet; man findet zunächst:

$$(5) \qquad \Pi^{\nu,1-\nu}(x) = \sin \nu\pi \cdot Z^{-\nu}(x),$$

während man allgemeiner folgende neue Funktion einführt:

$$(6) \qquad \Pi^{\nu,2n+1-\nu}(x) = \sin \nu\pi \cdot Z^{-\nu,n}(x).$$

Für $\varrho = 2n + 1 + \nu$ verschwindet die Funktion $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ immer; dagegen findet man:

$$(7) \qquad -\frac{2}{\pi}\left(D_{\varrho} \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu+1} = Z^{\nu}(x)$$

und allgemeiner:

$$(8) \qquad -\frac{2}{\pi}\left(D_{\varrho} \Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu+2n+1} = Z^{\nu,n}(x).$$

Für die Funktion $Z^{\nu,n}(x)$ findet man aus § 29, (2) die Differentialgleichung:

$$(9) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n-1}.$$

4) Um auch Verallgemeinerungen der Neumannschen Cylinderfunktion zu finden, setzen wir der Kürze halber:

$$(10)\qquad L^{\nu}(x) = 2\left(D_{\varrho}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu}, \quad 2\left(D_{\nu}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\nu=\varrho} = N^{\varrho}(x)$$

und allgemeiner, wenn n eine positive, ganze Zahl bedeutet:

$$(11)\quad L^{\nu,n}(x) = 2\left(D_{\varrho}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=\nu-2n}, \quad 2\left(D_{\nu}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\nu=\varrho+2n} = N^{\varrho+2n,n}(x),$$

so daß wir ohne Schwierigkeit finden:

$$(12)\quad L^{\nu}(x) = 2J^{\nu}(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\Big(\Psi(s+1)+\Psi(\nu+s+1)\Big),$$

$$(13)\quad N^{\varrho}(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{s!\,\Gamma(\varrho+s+1)}\Big(\Psi(s+\varrho+1)-\Psi(s+1)\Big),$$

und noch allgemeiner mittels (Γ_7) und § 29, (5):

$$(14)\quad L^{\nu,n}(x) = L^{\nu}(x) - P^{\nu,n}(x), \qquad N^{\nu,n}(x) = N^{\nu}(x) + P^{\nu,n}(x),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(15)\qquad P^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(n-s-1)!}{\Gamma(\nu+s-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2s}$$

gesetzt haben, und erhalten somit folgende elegante Formel:

$$(16)\qquad L^{\nu,n}(x) + N^{\nu,n}(x) = 2D_{\nu}J^{\nu}(x),$$

während wir für $L^{\nu,n}(x)$ und $N^{\nu,n}(x)$ die Differentialgleichungen:

$$(17)\quad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \frac{n!}{\Gamma(\nu-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n-2},$$

$$(18)\quad y^{(2)} + \frac{1}{x}y^{(1)} + \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \frac{2\nu}{x^2}\cdot J^{\nu}(x) - \frac{n!}{\Gamma(\nu-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n-2}$$

gewinnen, die mit (16) in Einklang stehen.

Bezeichnet n immer eine ganze, nicht negative Zahl, so findet man weiter, daß:

$$(19)\quad 2\left(D_{\varrho}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=-\nu-2n} = \pi\sin\nu\pi\cdot J^{-\nu}(x) + \cos\nu\pi\cdot L^{-\nu,n}(x),$$

$$(20)\quad 2\left(D_{\nu}\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\nu=-\varrho+2n} = -\pi\sin\varrho\pi\cdot J^{-\varrho}(x) + \cos\varrho\pi\cdot N^{-\varrho+2n,n}(x)$$

sein muß.

Die erste Formel (14) zeigt deutlich, daß $L^{\nu,n}(x)$ wirklich eine Verallgemeinerung der Neumannschen Cylinderfunktion darstellt; setzt man nämlich speziell $\nu = p$, wo p eine ganze Zahl bedeutet, so findet man:

(21) $$L^{p,n}(x) = \pi \cdot Y^p(x), \quad p \leqq n,$$

während man für $p > n$ die andere Formel:

(22) $$L^{p,n}(x) = \pi \cdot Y^p(x) + \sum_{s=0}^{s=p-n-1} \frac{(p-s-1)!}{s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2s},$$

findet, aus der sich folgende bemerkenswerte Spezialfälle ergeben:

(23) $L^{2n,n}(x) = \pi \cdot Y^{2n}(x) + S^{2n}(x)$, $L^{2n+1,n}(x) = \pi \cdot Y^{2n+1}(x) + S^{2n+1}(x)$,

wo S das in § 3, (10) definierte Schläflische Polynom bedeutet, während man für das damit nahe verwandte Polynom von Neumann[1]):

(24) $$O^n(x) = \frac{n}{4} \cdot \sum_{s=0}^{<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2s+1}$$

die ähnlichen Ausdrücke:

(25) $$\begin{cases} L^{2n,n-1}(x) = \pi \cdot Y^{2n}(x) + \dfrac{2x}{2n} \cdot O^{2n}(x), \\ L^{2n+1,n}(x) = \pi \cdot Y^{2n+1}(x) + \dfrac{2x}{2n+1} \cdot O^{2n+1}(x). \end{cases}$$

findet.

Weiter erhält man:

(26) $$N^{2n+1,n}(x) = -T^{2n+1}(x), \quad N^{2n,n}(x) = -T^{2n}(x),$$

und somit gibt (16) in Verbindung mit (23) und (26) die in § 3 mitgeteilte Formel (16) für die Neumannsche Cylinderfunktion, so daß wir für diese Teilung des Ausdruckes von $Y^n(x)$ eine natürliche Begründung gegeben haben.

§ 31. Die Differentialgleichung für $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

Untersuchungen mathematischer und physikalischer Art führen bisweilen zu der nicht homogenen linearen Differentialgleichung:

(1) $$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = x^{\varrho - 2},$$

so daß es uns nicht unangemessen erscheint, die verschiedenen Formen eines partikulären Integrales $\mathfrak{B}^{\nu,\varrho}(x)$ dieser Gleichung mittelst der im vorigen Paragraphen gegebenen Formeln zu diskutieren.

Im allgemeinen findet man ja:

(2) $$\mathfrak{B}^{\nu,\varrho}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right) \cdot 2^{\varrho-2}}{\cos \frac{\pi}{2}(\nu - \varrho)} \cdot \Pi^{\nu,\varrho}(x),$$

1) Theorie der Besselschen Funktionen, p. 13; 1867.

ein Ausdruck, welcher indessen in den folgenden Spezialfällen zu modifizieren ist.

1) $\varrho = \pm\nu + 2n$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet; die Formeln § 30, (2) geben hier:

(3) $\mathfrak{B}^{\nu,\pm\nu+2n}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\Gamma(\pm\nu+n)\,2^{\pm\nu+2n-2}\cdot A^{\pm\nu,n}(x),$

ein Ausdruck, der immer, auch wenn $\pm\nu+n$ Null oder negativ ganz ist, anwendbar bleibt.

2) $\varrho = \pm\nu + 2n + 1$, wo n eine ganze Zahl bedeutet; hier gibt § 30, (9) unmittelbar:

(4) $\mathfrak{B}^{\nu,\pm\nu+2n+1}(x) = (-1)^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\pm\nu+n+\frac{1}{2})\,2^{\pm\nu+2n-1}\cdot Z^{\pm\nu,n}(x),$

wo indessen $\pm\nu+n+\frac{1}{2}$ nicht gleich Null oder einer ganzen negativen Zahl sein darf, ein Spezialfall, der sich ohne Mühe nach 3) behandeln läßt.

3) $\varrho = \pm\nu - 2n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; man findet hier mittelst § 30, (17) den allgemeinen Ausdruck:

(5) $$\mathfrak{B}^{\nu,\pm\nu-2n}(x) = \frac{\Gamma(\pm\nu-n)}{n!\,2^{\mp\nu+2n+2}}\cdot L^{\pm\nu,n}(x)$$

und hieraus den oben erwähnten Spezialfall von (4), wenn man $\pm\nu+n+\frac{1}{2} = -p$ setzt. Wenn dagegen $\pm\nu-n = -p$, wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, muß man die Formel (5) noch modifizieren.

4) $\pm\nu - n = -p$. Differentiiert man die Differentialgleichung § 30, (17) nach ν und setzt man darauf $\pm\nu-n = -p$, so findet man vermöge § 30, (21):

(6) $$\mathfrak{B}^{n-p,-n-p}(x) = \frac{(-1)^p}{n!\,p!\,2^{n+p+2}}\cdot\Big(D_\nu L^{\nu,n}(x) - D_\nu Y^\nu(x)\Big)_{\nu=n-p}.$$

Hiermit ist die Diskussion des oben erwähnten partikulären Integrales $\mathfrak{B}^{\nu,\varrho}(x)$ vollständig durchgeführt; man kennt also immer das vollständige Integral der Differentialgleichung (1).

Wir bemerken noch, daß die Lommelsche Funktion uns erlaubt, folgende allgemeinere Differentialgleichung mittels einer unendlichen Reihe zu integrieren:

(7) $$y^{(2)} + \frac{1}{x}\,y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\left(\frac{x}{2}\right)^s,$$

wo die Koeffizienten a_s von x unabhängig sind.

Es ist nämlich leicht zu sehen, daß stets die asymptotische Gleichheit statthaben muß:

$$(8)\qquad \Pi^{\nu,\varrho+s}(x) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho-s\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+s}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+s}{2}+1\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s},$$

wo s eine sehr große positive Zahl bedeutet, und also ist es offenbar, daß ein partikuläres Integral von (7) sich durch folgende unendliche Reihe darstellen läßt:

$$(9)\qquad y = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+s}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho-s\right)}\cdot a_s\cdot\Pi^{\nu,\varrho+s}(x).$$

Denn erstens ist es offenbar, daß diese Reihe und die zwei anderen, die man daraus durch ein- oder zweimalige Differentiation nach x herleitet, alle im Inneren des Konvergenzkreises der Reihe rechter Hand in (7) konvergieren müssen, und zweitens genügt die Reihe (9) formell der Differentialgleichung (7).

In den im Anfange dieses Paragraphen betrachteten Spezialfällen muß auch (9) modifiziert werden; hierauf gehen wir jedoch nicht näher ein, sondern betrachten den Fall, in welchem $a_{2s+1} = 0$ ist und die unendliche Reihe:

$$(10)\qquad F(\nu,\varrho) = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s\right)a_{2s}$$

konvergiert, und finden dann aus (9) und § 29, (6) für unser Integral den Ausdruck:

$$(11)\qquad \begin{cases} y = F(\nu,\varrho)\,\Pi^{\nu,\varrho}(x) + \\ \quad + \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho\right)}\cdot\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s\right)a_{2s}A^{\nu,\varrho,s}(x),\end{cases}$$

das heißt also, daß sich y, von der einzigen Π-Funktion abgesehen, in einer Reihe entwickeln läßt, die nach den A-Funktionen fortschreitet.

Setzt man zum Beispiel:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}a_{2s}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = \left(\frac{2}{x}\right)^2\cdot\Pi^{\nu,\varrho}(x),$$

so findet man leicht folgende Entwicklung:

$$(12)\quad y=\frac{1}{\nu}\left(\Psi\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)-\Psi\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)\right)\Pi^{\nu,\varrho}(x)-\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{A^{\nu,\varrho,s}(x)}{\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s\right)\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s\right)},$$

wo Ψ die Gaußsche Funktion bedeutet.

Wir haben noch später (in § 39) eine andere spezielle Entwicklung dieser Art zu geben, während wir in § 115 die Differentialgleichung (7) von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten wollen.

§ 32. Elementare Integraldarstellungen von $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

Das erste Eulersche Integral ermöglicht uns, sehr leicht elementare Integraldarstellungen der Lommelschen Funktion zu finden; wendet man in der Tat die Formel (Γ_{16}) an, so bekommt man durch gliedweise Integration unmittelbar die Formel:

$$(1)\quad \frac{2}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\alpha}(x\cos\varphi)\,\frac{(\sin\varphi)^{2\beta-1}}{(\cos\varphi)^{\alpha-1}}\,d\varphi=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2s}}{\Gamma(s+\alpha+1)\,\Gamma(s+\beta+1)},$$

wo $\Re(\beta)>0$ vorausgesetzt werden muß; setzt man aber in (1):

$$\alpha=\frac{\varrho\pm\nu}{2},\quad \beta=\frac{\varrho\mp\nu}{2},$$

so findet man folgende erste Integraldarstellung der Π-Funktion:

$$(2)\quad \begin{cases} \Pi^{\nu,\varrho}(x)=\dfrac{2\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho\mp\nu}{2}\right)}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{\varrho\mp\nu}{2}}\cdot \\ \cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\frac{\varrho\pm\nu}{2}}(x\cos\varphi)\cdot\frac{(\sin\varphi)^{\varrho\mp\nu-1}}{(\cos\varphi)^{\frac{\varrho\pm\nu-2}{2}}}\,d\varphi, \end{cases}$$

wo also $\Re(\varrho\mp\nu)>0$ vorausgesetzt werden muß.

Setzt man speziell $\varrho=\nu-2n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so erhält man die einfache Formel:

$$(3)\quad \begin{cases} J^{\nu}(x)=\dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-n}}{\Gamma(\nu-n)}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{n}(x\cos\varphi)\cdot\frac{(\sin\varphi)^{2\nu-2n-1}}{(\cos\varphi)^{n-1}}\,d\varphi, \\ \Re(\nu-n)>0, \end{cases}$$

die sich in eleganterer Form darbietet, wenn man $n=0$ oder $\nu=n+1$

setzt; die andere Annahme $\varrho = -\nu - 2n$ gibt eine Formel, welche man aus (3) herleitet, indem man nur das Zeichen von ν ändert.

Führt man noch in (3) statt J das zweite Besselsche Integral § 18, (1) ein, so findet man für Π das Doppelintegral:

$$
(4)\quad \begin{cases} \Pi^{\nu,\varrho}(x) = \dfrac{4\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\varrho\pm\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho\mp\nu}{2}\right)}\cdot \\ \cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos\varphi\cos\psi)(\sin\psi)^{\varrho\mp\nu-1}\cos\psi(\sin\varphi)^{\varrho\pm\nu}d\psi\,d\varphi, \end{cases}
$$

wo man also voraussetzen muß, daß:

$$\Re(\varrho\mp\nu)>0,\quad \Re(\varrho\pm\nu)>-1$$

ist. Das Doppelintegral (4) führt uns leicht zu dem Integrale § 18, (10) für $Z^{\nu}(x)$; dagegen scheint es weit schwieriger, die Integrale in § 17, (12), (13) für $\Pi^{\nu}(x)$ und $X^{\nu}(x)$ aus (4) herzuleiten.

Es ist sehr bemerkenswert, daß genau dieselbe Methode mittels § 18, (11) folgende andere Integraldarstellung:

$$
(5)\quad \begin{cases} \Pi^{\nu,\varrho+1}(x) = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho\mp\nu}{2}\right)}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{\varrho\mp\nu}{2}}\cdot \\ \cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} Z^{\frac{\varrho\pm\nu}{2}}(x\cos\varphi)\cdot\frac{(\sin\varphi)^{\varrho\mp\nu-1}}{(\cos\varphi)^{\frac{\varrho\pm\nu-2}{2}}}d\varphi, \end{cases}
$$

gibt, wo man ebenfalls $\Re(\varrho\mp\nu)>0$ voraussetzen muß. Ebenso findet man die mit (3) analoge Formel:

$$
(6)\quad \begin{cases} Z^{\nu}(x) = \dfrac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} Z^{0}(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu-1}\cos\varphi\,d\varphi, \\ \qquad\qquad \Re(\nu)>0, \end{cases}
$$

während die Integraldarstellung § 18, (10) das zu (4) ganz analoge Doppelintegral liefert:

$$
(7) \quad \begin{cases} \Pi^{\nu,\varrho+1}(x) = \dfrac{4 \sin \frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho}}{\Gamma\left(\frac{\varrho\pm\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho\mp\nu}{2}\right)}\cdot \\ \cdot \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi\cos\psi)(\sin\varphi)^{\varrho\pm\nu}(\sin\psi)^{\varrho\mp\nu-1}\cos\psi\, d\varphi\, d\psi, \end{cases}
$$

welches unter denselben Bedingungen anwendbar ist.

Diese Integraldarstellungen für die Lommelsche Funktion werden uns später in Kapitel XXV bei unseren Untersuchungen über Nullentwicklungen sehr nützlich sein.

§ 33. Anwendungen von $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ auf Reihen und Integrale.

Die Lommelsche Funktion gestattet, wie deutlich aus § 29, (12a), (13a) hervorgeht, zwei verschiedene Reihenentwicklungen nach Cylinderfunktionen zu bilden. Gehen wir nämlich von (12a) aus, so finden wir nach einer Anwendung von (Γ_3) folgende Entwicklung:

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin\pi(\nu-\varrho)}{2\pi}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{(\nu+s)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+s}{2}+1\right)}\cdot J^{\nu+s}(x) = \\ = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho-1}\left(\Psi^{\nu,\varrho}(x)J^{\nu-1}(x) - \Psi^{\nu-1,\varrho}(x)J^{\nu}(x)\right), \end{cases}
$$

die in der ganzen x-Ebene gültig ist, während die entsprechenden Reihen mit anderen Cylinderfunktionen divergieren müssen.

Ändert man nun in (1) das Zeichen von x und multipliziert man mit $e^{\nu\pi i}$, so findet man durch Addition und Subtraktion dieser Gleichungen die weiteren Entwicklungen:

$$
(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin\pi(\nu-\varrho)}{2\pi}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s+1\right)}\cdot J^{\nu+2s}(x) = \\ = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho-1}\left(\Pi^{\nu,\varrho}(x)J^{\nu-1}(x) - \Pi^{\nu-1,\varrho+1}(x)J^{\nu}(x)\right), \end{cases}
$$

$$
(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin\pi(\nu-\varrho)}{2\pi}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s+1)\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+3}{2}+s\right)}\cdot J^{\nu+2s+1}(x) = \\ = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho-1}\left(\Pi^{\nu-1,\varrho}(x)J^{\nu}(x) - \Pi^{\nu,\varrho+1}(x)J^{\nu-1}(x)\right), \end{cases}
$$

die ebenfalls in der ganzen x-Ebene gültig sind. Für $\varrho = 0$ nehmen diese Formeln beide eine sehr einfache Gestalt an. Setzt man noch $\varrho = -\nu$, so gibt (2) mittelst § 30, (1) und der Lommelschen Fundamentalformel § 7, (5) folgende Entwicklung:

$$(4)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\Gamma(\nu+s)}{s!} J^{\nu+2s}(x),$$

die wir später in § 108 nach einer anderen Methode herleiten wollen; bemerkt man, daß sich für $\nu = 0$ das erste Glied rechter Hand in (4) auf $J^0(x)$ reduzieren muß, so findet man aus (4) die Formel § 22, (5) wieder.

Geht man dagegen von § 29, (13a) aus, so findet man, wenn man noch $\varrho - \nu$ für ϱ setzt, die andere zu (2) und (3) analoge Entwicklung:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s-1} J^{\nu+s}(x)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)} = \\ \qquad = \Pi^{\nu-1,\varrho-1}(x) J^{\nu}(x) - \Pi^{\nu,\varrho}(x) J^{\nu-1}(x), \end{cases}$$

die gleichfalls in der ganzen x-Ebene gültig ist. Die Annahme $\varrho = -\nu$ gibt hier die mit (4) analoge Entwicklung:

$$(6)\qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{s}}{s!} \cdot J^{\nu+s}(x),$$

die wir ebenfalls nach einer anderen Methode in § 104 herleiten werden.

Für das entsprechende Integral findet man aus § 29, (8a) und § 27, (6) den Ausdruck:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)} \cdot \displaystyle\int \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1} C^{\nu}(x)\, dx = \\ \qquad = x\left(C^{\nu}(x)\Pi^{\nu-1,\varrho-1}(x) - C^{\nu-1}(x)\Pi^{\nu,\varrho}(x)\right) \end{cases}$$

und somit aus (5) die Entwicklung:

$$(8)\qquad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}\right)} \cdot \int \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1} J^{\nu}(x)\, dx = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s} J^{\nu+s}(x)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s+1\right)};$$

setzt man weiterhin in (7) $\varrho + 1$ für ϱ, so liefert (3) die andere Entwicklung:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)}\cdot\displaystyle\int\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho} J^{\nu}(x)\,dx = \\ \quad = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\varrho}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s+1)\,\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+3}{2}+s\right)}\cdot J^{\nu+2s+1}(x). \end{cases}$$

Indem wir vorläufig von den Fällen absehen, in denen die vorhergehenden allgemeinen Formeln durch eine Differentiation nach ϱ oder ν modifiziert werden, wollen wir einen eigentümlichen Satz über die dort vorkommenden unendlichen Reihen und unbestimmten Integrale beweisen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zuerst die Reihe (2) und setzen der Kürze halber die Summe dieser Reihe gleich $\left(\frac{2}{x}\right)^{\varrho}\sigma^{\nu,\varrho}(x)$; dann gibt § 29, (6) unmittelbar die Identität:

$$(10)\quad \sigma^{\nu,\varrho+2n}(x) = \frac{x}{2}\left(J^{\nu-1}(x)\,A^{\nu,\varrho,n}(x) - J^{\nu}(x)\,A^{\nu-1,\varrho+1,n}(x)\right) + \sigma^{\nu,\varrho}(x),$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet; ähnliche Formeln gelten offenbar für die Reihen (3), (5) und für das Integral (7).

Für $\varrho = 0$ hat Lommel[1]) die Formel (10) auf ganz andere Weise hergeleitet.

Weiter finden wir, daß, wenn $\varrho = \pm\nu + 2n$ ist, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, das Integral (7) und die Reihensummen (2) und (5) sich unter endlicher Form durch Cylinderfunktionen ausdrücken lassen.

Für $\varrho = 0$ ergibt (9) die elegante Formel:

$$(11)\quad \int J^{\nu}(x)\,dx = 2\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} J^{\nu+2s+1}(x),$$

die ebenfalls Lommel[2]) angehört. Setzt man in (11) $\nu = \pm\frac{1}{2}$, so findet man folgende Entwicklungen für die zwei Fresnelschen Integrale:

$$(12)\quad F_1(\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} J^{2s+\frac{1}{2}}(x),$$

$$(13)\quad F_2(\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} J^{2s+\frac{3}{2}}(x),$$

1) Studien über die Besselschen Funktionen, p. 37; 1868.

2) loc. cit. p. 45.

die ebenfalls von Lommel[1]) gefunden worden sind; für dieselben Transcendenten findet man aus (8) folgende Entwicklungen:

$$(14)\qquad F_1(\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2x)^{s+1} J^{s-\frac{1}{2}}(x)}{1\cdot 5\cdot 9 \cdots (4s+1)},$$

$$(15)\qquad F_2(\sqrt{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2x)^{s+1} J^{s+\frac{1}{2}}(x)}{3\cdot 7\cdot 11 \cdots (4s+3)}.$$

Für den Integralsinus findet man aus (8) und (9), indem man $\nu = \frac{1}{2}$, beziehentlich $\varrho = \pm\frac{1}{2}$ einsetzt, folgende Entwicklungen:

$$(16)\quad S_i(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2x)^{s+\frac{1}{2}}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+1)} J^{s+\frac{1}{2}}(x),$$

$$(17)\quad S_i(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{3}{2} J^{\frac{3}{2}}(x) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(4s+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+1)} J^{s+\frac{3}{2}}(x) \right).$$

Um die entsprechenden Formeln für den Integralcosinus zu finden, differentiieren wir die Formeln (8), (9) nach ϱ und setzen darnach $\nu = -\frac{1}{2}$, beziehentlich $\varrho = \pm\frac{1}{2}$, so daß (4) und (6) leicht ergeben:

$$(18)\quad C_i(x) = \log x - \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Psi(s+1)}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{s+\frac{1}{2}} J^{s-\frac{1}{2}}(x),$$

$$(19)\quad C_i(x) = \log x - \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2s+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})}{s!} \Psi(s+1) J^{2s+\frac{1}{2}}(x).$$

Wenn $\varrho = \nu - 2n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so muß man zuerst die Formeln (7) und (2) nach ϱ differentiieren, ehe man den obenerwähnten speziellen Wert einführt; dadurch findet man:

$$(20)\quad \frac{n!}{\Gamma(\nu-n)} \int \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n-1} C^{\nu}(x)\,dx = \frac{x}{2}\left(C^{\nu}(x) L^{\nu-1,n}(x) - C^{\nu-1}(x) L^{\nu,n}(x)\right),$$

$$(21)\quad \begin{cases} 2 \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)(n+s-1)!}{\Gamma(\nu+s-n+1)} J^{\nu+2s}(x) = \\ = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\nu-2n-1} \left(J^{\nu-1}(x) L^{\nu,n}(x) - J^{\nu}(x) L^{\nu-1,n}(x)\right). \end{cases}$$

Setzt man nun weiter in (20) $\nu = 2n+1$, $\nu = 2n+2$, so findet man aus § 30, (23) und (24) und mit Zuhilfenahme der Lommelschen Fundamentalformel:

1) Abhandlungen der Leipziger Akademie Bd. 15, p. 597; 1886.

$$(22)\qquad \int C^{2n+1}(x)\,dx = \frac{x}{2}\left(C^{2n}(x)S^{2n+1}(x) - C^{2n+1}(x)S^{2n}(x)\right),$$

$$(23)\quad \frac{1}{n}\cdot\int x\,C^{2n}(x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\frac{4}{2n}\,C^{2n-1}(x)\,O^{2n}(x) - \frac{4}{2n+1}\,O^{2n-1}(x)\,C^{2n}(x)\right),$$

wobei wir in der letzten Formel $n-1$ für n gesetzt haben; die Formel (23) ist von Lommel[1]) gefunden worden.

Für $\nu = 2n$ gibt (21) auf dieselbe Weise:

$$2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty} J^{2n+2s}(x) = \frac{x}{2}\left(J^{2n+1}(x)S^{2n}(x) - J^{2n}(x)S^{2n+1}(x)\right) + 1;$$

wendet man nun die durch (4) gegebene Entwicklung für die Einheit an, so findet man für den Ausdruck linker Hand eine endliche Reihe, so daß man also hier vermöge des Satzes in § 13 für J eine willkürliche Cylinderfunktion einführen darf; beachtet man noch die Identität:

$$C^{-n}(x) = (-1)^n C^n(x),$$

so findet man endlich folgende bemerkenswerte Formel:

$$(24)\qquad \frac{x}{2}\left(C^{2n}(x)S^{2n+1}(x) - C^{2n+1}(x)S^{2n}(x)\right) = \sum_{s=-2n}^{s=2n} C^s(x).$$

§ 34. Anwendung auf die Funktionen li e^{-x}, $C_i(x)$ und $S_i(x)$, $K(x)$, $F_1(x)$ und $F_2(x)$.

Die allgemeine Integralformel § (33), (7) erlaubt uns, speziellere Entwicklungen zu geben, durch die wir unmittelbar einige elementare Integrale und neue Darstellungen der schon in § 24 betrachteten Transcendenten bestimmen wollen. Um diese Formeln in möglichst einfacher Gestalt zu geben, führen wir folgende Verallgemeinerungen der trigonometrischen und der Exponentialfunktion ein:

$$(1)\quad \begin{cases} \gamma^{\nu}(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+2s}}{\Gamma(\nu+2s+1)}, \quad \sigma^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{\nu+2s+1}}{\Gamma(\nu+2s+2)}, \\ \varepsilon^{\nu}(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{\nu+s}}{\Gamma(\nu+s+1)}, \end{cases}$$

so daß wir unmittelbar finden:

$$(2)\qquad \gamma^0(x) = \cos x, \quad \sigma^0(x) = \sin x, \quad \varepsilon^0(x) = e^x;$$

übrigens erhalten wir für die Funktionen (1) folgende Fundamentalformeln:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 9, p. 442; 1876.

(3) $\varepsilon^{\nu}(x) = i^{-\nu}\left(\gamma^{\nu}(ix) - i\sigma^{\nu}(ix)\right) = i^{\nu}\left(\gamma^{\nu}(-ix) + i\sigma^{\nu}(-ix)\right),$

(4) $D_x\gamma^{\nu}(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} - \sigma^{\nu}(x), \quad D_x\sigma^{\nu}(x) = \gamma^{\nu}(x), \quad D_x\varepsilon^{\nu}(x) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} + \varepsilon^{\nu}(x),$

welche unmittelbar die bekannten Eigenschaften der entsprechenden elementaren Funktionen geben, wenn man nur $\nu = 0$ setzt. Weiter bemerken wir, daß die Formel § 29, (7) folgende Identitäten liefert:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Pi^{-\frac{1}{2},\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot \gamma^{\nu+\frac{1}{2}}(x), \\ \Pi^{\frac{1}{2},\nu+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \cdot \sigma^{\nu+\frac{1}{2}}(x); \end{cases}$$

wir erhalten also aus § 33, (7) folgende elementare Integralformeln:

$$(6)\qquad \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int x^{\nu-1}\cos x\,dx = \cos x \cdot \gamma^{\nu}(x) + \sin x \cdot \sigma^{\nu}(x),$$

$$(7)\qquad \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int x^{\nu-1}\sin x\,dx = \sin x \cdot \gamma^{\nu}(x) - \cos x \cdot \sigma^{\nu}(x),$$

$$(8)\qquad \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int x^{\nu-1}e^{-x}\,dx = e^{-x} \cdot \varepsilon^{\nu}(x).$$

Für ν gleich einer positiven ganzen Zahl findet man hieraus drei bekannte Integralformeln, während die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$ wieder die Formeln § 24, (13), (14) gibt. Führt man dagegen die Reihenentwicklungen (1) ein und setzt man noch x^2 für x, so erhält man folgende neue Darstellungen für die Integrale von Kramp und Fresnel:

$$(9)\qquad K(x) = e^{-x^2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2^s x^{2s+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)},$$

$$(10)\qquad \begin{cases} F_1(x) = \cos(x^2) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s} x^{4s+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s+1)} + \\ \qquad + \sin(x^2) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s+1} x^{4s+3}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s+3)}, \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} F_2(x) = \sin(x^2) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s 2^{2s} x^{4s+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s+1)} - \\ \qquad - \cos(x^2) \cdot \sum_{s=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1} x^{4s+3}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s+3)}, \end{cases}$$

von denen die erste neu zu sein scheint, während die zwei letzten

nichts anderes sind als die bekannten Reihen von Knochenhauer[1]); die drei letzten Formeln stehen mit der Identität:

(12) $$F_1\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) + iF_2\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot K(x)$$

im Einklange.

Wenn ν einer ganzen, nicht positiven Zahl gleich ist, so werden die Formeln (6), (7), (8) unbrauchbar, so daß sie zuerst nach ν differentiiert werden müssen. Auf diese Weise findet man für $\nu = 0$ folgende Darstellungen:

(13) $$\begin{cases} S_i(x) = \cos x \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} \lambda(2s+1) - \\ \qquad - \sin x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \lambda(2s), \end{cases}$$

(14) $$\begin{cases} C_i(x) = C + \log x - \sin x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} \lambda(2s+1) - \\ \qquad - \cos x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} \lambda(2s), \end{cases}$$

(15) $$\operatorname{li} e^{-x} = C + \log x - e^{-x} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s!} \lambda(s),$$

von denen die zwei ersten von Lommel[2]) gefunden worden sind, während (15) vielleicht neu ist; diese drei Formeln stimmen mit der Identität:

(16) $$C_i\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}\right) + iS_i\left(x \cdot e^{\frac{\pi i}{2}}\right) = \operatorname{li} e^{-x} + \frac{\pi i}{2}$$

überein.

Kehren wir zu den Formeln (6), (7) zurück, so finden wir mittelst (5) die weiteren Darstellungen:

(17) $$S_i(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{8}}\left(\sin x \cdot L^{-\frac{1}{2}}(x) - \cos x \cdot L^{\frac{1}{2}}(x)\right),$$

(18) $$C_i(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{8}}\left(\cos x \cdot L^{-\frac{1}{2}}(x) + \sin x \cdot L^{\frac{1}{2}}(x)\right),$$

wo $L^\nu(x)$ die in § 30, (12) definierte Funktion bedeutet; die Formeln (17), (18) werden uns später in § 88 für die asymptotischen Darstellungen der Funktionen $S_i(x)$ und $C_i(x)$ sehr nützlich sein.

---

1) Poggendorff Annalen Bd. 41, p. 104; 1837.

2) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 204; 1880.

Über die in (1) gegebenen Verallgemeinerungen der elementaren Transcendenten haben wir noch zu bemerken, daß sich die vier unbestimmten Integrale:

$$\text{(19)}\quad \begin{cases} \int \cos(\alpha x)\cdot\gamma^{\nu}(\beta x)\,dx, & \int \sin(\alpha x)\cdot\gamma^{\nu}(\beta x)\,dx, \\ \int \cos(\alpha x)\cdot\sigma^{\nu}(\beta x)\,dx, & \int \sin(\alpha x)\cdot\sigma^{\nu}(\beta x)\,dx \end{cases}$$

sehr leicht durch dieselben Funktionen darstellen lassen. Man kann dies durch eine partielle Integration und darauf folgende Anwendung der Formeln (6), (7) nachweisen; dagegen führt folgende andere Methode unmittelbar zum Ziele: Wendet man nämlich auf die Lommelsche Funktion den Satz § 25, 5 an, so gibt die allgemeine Integralformel § 27, (6) in Verbindung mit § 33, (7) folgende andere:

$$\text{(20)}\begin{cases} \int\left((\alpha^2-\beta^2)x+\frac{\nu^2-\mu^2}{x}\right)\Pi^{\nu,\varrho}(\beta x)\,C^{\mu}(\alpha x)\,dx = \\ \quad = \beta x\,C^{\mu}(\alpha x)\,\Pi^{\nu-1,\varrho-1}(\beta x)-\alpha x\,C^{\mu-1}(\alpha x)\,\Pi^{\nu,\varrho}(\beta x)- \\ \quad -(\nu-\mu)\,\Pi^{\nu,\varrho}(\beta x)\,C^{\mu}(\alpha x)-\alpha x\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\varrho}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\cos\frac{\pi}{2}(\mu-\varrho)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}\cdot \\ \quad\quad \cdot\left(C^{\mu}(\alpha x)\,\Pi^{\mu-1,\varrho-1}(\alpha x)-C^{\mu-1}(\alpha x)\,\Pi^{\nu,\varrho}(\alpha x)\right), \end{cases}$$

welche eine Verallgemeinerung der Formel § 28, (1) ist. Um nun die Integrale (19) hieraus zu erhalten, braucht man nur $\mu=\pm\frac{1}{2}$ und $\nu=\pm\frac{1}{2}$ anzunehmen.

Kapitel VI.

Die Funktionen $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ und $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$.

§ 35. Fundamentale Eigenschaften von $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$.

Es ist klar, daß sich die Lommelsche Funktion als eine natürliche Verallgemeinerung der Reihen § 1, (9) für die Besselsche Cylinderfunktion und § 17, (14), (15) für die Funktionen $\Pi^{\nu}(x)$ und $X^{\nu}(x)$ darstellt. Wir haben daher noch die entsprechende Verallgemeinerung der Reihen § 6, (7) für $J^{\nu}(x)$ und § 19, (5) für $\Phi^{\nu}(x)$ zu suchen, und dies um so mehr, da die so erhaltene Funktion in

der Theorie der Cylinderfunktionen eine ähnliche Rolle spielt wie die Lommelsche Funktion.

Um diese neue Funktion zu finden, bemerken wir, daß die Identität:

$$(1)\quad \Delta_\nu\left((2xi)^\varrho e^{-ix}\right) = 4(\varrho+\tfrac{1}{2})\,(2xi)^{\varrho-1}e^{-ix} - 4(\varrho^2-\nu^2)(2ix)^{\varrho-2}e^{-ix}$$

uns ganz natürlich dazu führt:

$$(2)\qquad \omega^\nu(x) = \frac{2ie^{-ix}}{i^\nu\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})(2xi)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)} = \omega^{\nu,\varrho}(x)$$

zu setzen; denn die Formel (1) gibt dann unmittelbar:

$$(3)\qquad \Delta_\nu\left(\frac{1}{(2\varrho+1)i}\,\omega^{\nu,\varrho+1}(x)\right) = \frac{1}{x}\left(\omega^{\nu,\varrho}(x) - \omega^{\nu,\varrho+1}(x)\right);$$

also finden wir für die gesuchte Funktion $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ folgende erste Fundamentalformel:

$$(4)\qquad \Phi^{\nu,\varrho+1}(x) = \Phi^{\nu,\varrho}(x) - \frac{1}{(2\varrho+1)i}\,\omega^{\nu,\varrho+1}(x),$$

oder, noch allgemeiner, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$(5)\qquad \Phi^{\nu,\varrho+n}(x) = \Phi^{\nu,\varrho}(x) - \sum_{s=1}^{s=n}\frac{\omega^{\nu,\varrho+s}(x)}{(2\varrho+2s-1)i};$$

setzen wir in dieser Formel noch $\varrho-n$ für ϱ, so ergibt sich:

$$(6)\qquad \Phi^{\nu,\varrho-n}(x) = \Phi^{\nu,\varrho}(x) + \sum_{s=1}^{s=n}\frac{\omega^{\nu,\varrho-n+s}(x)}{(2\varrho-2n+2s-1)i}.$$

Der explizite Ausdruck der Φ-Funktion wird aus (5) erhalten, wenn man die dort vorkommende positive ganze Zahl n über alle Grenzen hinaus wachsen läßt; dadurch findet man:

$$(7)\qquad \Phi^{\nu,\varrho}(x) = \frac{e^{-ix}}{i^\nu\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\varrho+s+\frac{1}{2})(2xi)^{\varrho+s}}{\Gamma(\varrho+\nu+s+1)\Gamma(\varrho-\nu+s+1)}.$$

Diese Definition wird jedoch unbrauchbar, wenn ϱ die Hälfte einer ungeraden negativen ganzen Zahl ist, weil dann die ersten Glieder der Reihe, wie auch $\omega^{\nu,\varrho}(x)$ selbst unbegrenzt wachsen. Um eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung zu finden, kann man in (7) durch $\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})$ dividieren und dann den obenerwähnten speziellen Wert von ϱ einführen. Wir gehen indessen nicht näher darauf ein, sehen vielmehr in den folgenden Untersuchungen von diesem Spezialfalle ganz ab.

Sucht man die Differentialgleichungen der zugehörigen Funktionen y_ν und z_ν auf, so findet man leicht:

$$y_\nu = \frac{2\varrho - 1}{\varrho + \nu}\Big(\Phi^{\nu,\varrho}(x) - \Phi^{\nu,\varrho-1}(x)\Big) - \frac{\omega^{\nu,\varrho}(x)}{(\varrho+\nu)i},$$

$$z_\nu = \frac{2\varrho - 1}{\varrho - \nu}\Big(\Phi^{\nu,\varrho-1}(x) - \Phi^{\nu,\varrho}(x)\Big) - \frac{\omega^{\nu,\varrho}(x)}{(\varrho-\nu)i},$$

und somit erhält man aus § 25, (10) für die Φ-Funktion folgende Fundamentalgleichungen:

(8) $$\Phi^{\nu-1,\varrho}(x) - \Phi^{\nu+1,\varrho}(x) = 2D_x\Phi^{\nu,\varrho}(x) - \frac{2\varrho}{\varrho^2 - \nu^2}\,\omega^{\nu,\varrho}(x),$$

(9) $$\Phi^{\nu-1,\varrho}(x) + \Phi^{\nu+1,\varrho}(x) = \frac{2\nu}{x}\,\Phi^{\nu,\varrho}(x) - \frac{2\nu}{\varrho^2 - \nu^2}\,\omega^{\nu,\varrho}(x).$$

Wir gehen nicht näher auf die Funktion $\Phi^{\nu,\nu+\varrho}(x)$ ein, sondern betrachten noch einige Spezialfälle der allgemeinen Φ-Funktion.

§ 36. Spezialfälle von $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$.

Es leuchtet ein, daß die Φ-Funktion durch Spezialisierung der Parameter eine Reihe von spezielleren Funktionen geben wird, die zu den aus der Lommelschen Funktion hergeleiteten analog sind. Zunächst findet man tatsächlich folgende Formeln:

(1) $$\Phi^{\nu,0}(x) = \Phi^{\nu}(x),$$

(2) $$\Phi^{\nu,\nu-n}(x) = J^{\nu}(x), \quad \Phi^{\nu,-\nu-n}(x) = e^{-\nu\pi i}\cdot J^{-\nu}(x),$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet.

Wenden wir uns nunmehr zu den nach ν oder ϱ genommenen Differentialquotienten von $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$, so finden wir ähnliche Funktionen wie L und N in § 30; um die Analogie der Bezeichnungen vollständig durchzuführen, setzen wir:

(3) $$2\Big(D_\varrho\Phi^{\nu,\varrho}(x)\Big)_{\varrho=\nu} = \mathfrak{L}^{\nu}(x), \quad 2\Big(D_\nu\Phi^{\nu,\varrho}(x)\Big)_{\nu=\varrho} = \mathfrak{N}^{\varrho}(x)$$

und allgemeiner, indem n eine positive ganze Zahl bedeutet:

(4) $$2\Big(D_\varrho\Phi^{\nu,\varrho}(x)\Big)_{\varrho=\nu-n} = \mathfrak{L}^{\nu,n}(x), \quad 2\Big(D_\nu\Phi^{\nu,\varrho}(x)\Big)_{\nu=\varrho+n} = \mathfrak{N}^{\varrho+n,n}(x),$$

so daß § 35, (7) ohne Schwierigkeit:

(5) $$\begin{cases} \mathfrak{L}^{\nu}(x) = 2J^{\nu}(x)\log(2xi) + \\ \quad + \dfrac{2e^{-ix}}{i^{\nu}\sqrt{\pi}}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})\,(2xi)^{\nu+s}}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)}\Big(\Psi(\nu+s+\tfrac{1}{2}) - \\ \qquad\qquad - \Psi(2\nu+s+1) - \Psi(s+1)\Big), \end{cases}$$

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{N}^{\nu}(x) = -\pi i J^{\nu}(x) + \\ \quad + \dfrac{2e^{-ix}}{i^{\nu}\sqrt{\pi}}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})\,(2xi)^{\nu+s}}{s!\,\Gamma(2\nu+s+1)}\Big(\Psi(s+1) - \Psi(2\nu+s+1)\Big) \end{cases}$$

und noch allgemeiner mit Zuhilfenahme von § 35, (5):

(7) $\mathfrak{L}^{\nu,n}(x) = \mathfrak{L}^{\nu}(x) - \mathfrak{P}^{\nu,n}(x), \quad \mathfrak{N}^{\nu,n}(x) = \mathfrak{N}^{\nu}(x) + \mathfrak{P}^{\nu,n}(x)$

liefert, wo wir der Kürze halber:

(8) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{(-1)^n 2 e^{-ix}}{i^\nu \sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (n-s-1)! \, \Gamma(\nu-n+s+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu-n+s+1)} (2xi)^{\nu+s-n} = \\ &\qquad = \mathfrak{P}^{\nu,n}(x) \end{aligned} \right.$$

gesetzt haben.

Aus (5), (6) und (7) ergibt sich demnach die zu § 30, (16) analoge Formel:

(9) $$\mathfrak{L}^{\nu,n}(x) + \mathfrak{N}^{\nu,n}(x) = 2 D_\nu J^\nu(x);$$

zugleich findet man die zu § 30, (19), (20) analogen Formeln:

(10) $$2 \left(D_\varrho \Phi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\varrho=-\nu-n} = e^{-\nu\pi i} \cdot \mathfrak{L}^{-\nu,n}(x),$$

(11) $$2 \left(D_\nu \Phi^{\nu,\varrho}(x)\right)_{\nu=-\varrho+n} = e^{-\varrho\pi i} \cdot \mathfrak{N}^{-\varrho+n,n}(x).$$

Setzt man nun weiter für ν die ganze Zahl p, so findet man hier:

(12) $$\mathfrak{L}^{p,n}(x) = \pi i J^p(x) + \pi Y^p(x), \quad p \leqq \frac{n}{2}$$

und für $2p > n$:

(13) $$\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{L}^{p,n}(x) = \pi i J^p(x) + \pi Y^p(x) + \\ &\quad + \frac{(-1)^p 2 e^{-ix}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{2p-n-1} \frac{\Gamma(s-p+\frac{1}{2})(2p-s-1)!}{i^s s!} \left(\frac{1}{2x}\right)^{p-s}, \end{aligned} \right.$$

so erhält man noch die zu § 30, (23), (25) analogen Formeln:

(14) $$\mathfrak{L}^{n,n}(x) = \pi i J^n(x) + \pi Y^n(x) + \mathfrak{S}^n(x),$$

(15) $$\mathfrak{L}^{n,1}(x) = \pi i J^n(x) + \pi Y^n(x) + \frac{2x}{n} \cdot \mathfrak{O}^n(x),$$

wo die neue Funktion:

(16) $$\mathfrak{O}^n(x) = \frac{n\sqrt{\pi} \cdot i^{n+1}}{e^{ix}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2n-s-1)!}{s! \, \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2xi}\right)^{n-s+1}$$

in der Theorie der Neumannschen Reihen erster Art eine ganz ähnliche Rolle spielt wie die rationale Funktion $O^n(x)$ von Neumann.

Beachtet man noch, daß (6) die weitere Formel:

(17) $$\mathfrak{N}^{n,n}(x) = -\pi i J^n(x) - \mathfrak{T}^n(x)$$

liefert, so findet man endlich die natürliche Begründung der schon in § 6, (9) gegebenen Teilung des Ausdruckes für die Neumannsche Cylinderfunktion.

§ 37. Anwendungen von $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ auf Reihen und Integrale.

Die in den zwei vorhergehenden Paragraphen dargelegte Analogie zwischen den Funktionen $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ und $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ läßt sich auch auf Reihen und Integrale übertragen, wie wir kurz andeuten wollen.

Aus den allgemeinen Formeln des § 27 finden wir:

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi^{\nu-1,\varrho}(x)J^{\nu}(x) - \Phi^{\nu,\varrho}(x)J^{\nu-1}(x) = \\ = \dfrac{2^{\varrho+1}\cdot x^{\varrho-1}\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})\sin\pi(\varrho-\nu)}{i^{\nu-\varrho}\sqrt{\pi^3}e^{ix}}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{i^s(\nu+s)\Gamma(\nu-\varrho+s)}{\Gamma(\nu+\varrho+s+1)}J^{\nu+s}(x), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{2\Gamma(\varrho+\frac{1}{2})}{i^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)}\cdot\displaystyle\int(2xi)^{\varrho-1}e^{-ix}C^{\nu}(x)\,dx = \\ = x\big(C^{\nu}(x)\Phi^{\nu-1,\varrho}(x) - C^{\nu-1}(x)\Phi^{\nu,\varrho}(x)\big) + \dfrac{x}{\varrho-\nu}\,\omega^{\nu,\varrho}(x)\,C^{\nu}(x), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{ix}}{\Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)}\cdot\displaystyle\int x^{\varrho-1}e^{-ix}J^{\nu}(x)\,dx = \\ = \dfrac{x^{\varrho}J^{\nu}(x)}{\Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu+1)} - \dfrac{2x^{\varrho}\sin\pi(\nu-\varrho)}{\pi}\cdot \\ \cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}{}'\frac{i^s(\nu+s)\Gamma(\nu-\varrho+s)}{\Gamma(\varrho+\nu+s+1)}J^{\nu+s}(x). \end{cases}$$

Wendet man nun die Formeln § 35, (5), (6) an, so leuchtet ein, daß für die eben betrachteten Reihen und Integrale der durch § 33, (10) ausgedrückte Satz gültig ist.

Wir betrachten ferner einige Spezialfälle unserer drei Formeln und bemerken zuerst, daß die Reihen (1) und (3) für $\varrho = 0$ eine sehr einfache Form annehmen, während (1) für $\varrho = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ mittelst § 24, (11) für das Integral von Kramp folgende neue Entwicklung liefert:

$$(4)\qquad e^{-\frac{x^2}{2}}K(x) = \sqrt{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} i^{s+\frac{1}{2}}J^{s+\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^2 i}{2}\right).$$

Setzt man weiter in (1) $\varrho = -\nu$, so findet man durch Anwendung der Lommelschen Fundamentalformel die weitere zu § 33, (4) analoge Entwicklung:

$$(5)\qquad e^{ix}(2x)^{\nu} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{i^s(\nu+s)\Gamma(2\nu+s)}{s!}J^{\nu+s}(x),$$

woraus sich für $\nu = 0$ die in § 22, (6), (7) gefundenen Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ ergeben; die Formel (5) werden wir später in § 109 noch durch eine andere Methode herleiten.

Differentiiert man die Formel (1) nach ϱ und setzt man $\varrho = \nu - n$, so findet man mittelst § 36, (14):

$$(6) \quad 1 + \frac{x}{2}\left(J^{n+1}(x)\,\mathfrak{S}^{n}(x) - J^{n}(x)\,\mathfrak{S}^{n+1}(x)\right) = 2e^{-ix}\cdot\sum_{s=n+1}^{s=\infty} i^{s} J^{s}(x),$$

also durch Zuhilfenahme von (5) die zu § 33, (24) analoge Formel:

$$(7) \quad \frac{x}{2}\left(C^{n}(x)\,\mathfrak{S}^{n+1}(x) - C^{n+1}(x)\,\mathfrak{S}^{n}(x)\right) = e^{-ix}\cdot\sum_{s=-n}^{s=+n} i^{s} C^{s}(x),$$

wo C eine willkürliche Cylinderfunktion bedeutet.

Hier brechen wir diese Untersuchungen ab, um noch eine etwas allgemeinere Anwendung der B-Funktionen zu erwähnen.

§ 38. Fundamentale Eigenschaften der Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$.

Die Funktionen Π und Φ, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen als Anwendungen der allgemeinen B-Funktionen untersucht haben, sind so einfach, daß man ihre Fundamentaleigenschaften bequem direkt herleiten kann, falls man die Funktionen durch die unendlichen Reihen definiert. Wir wollen nunmehr dieselben allgemeinen Formeln auf einen anderen Fall anwenden, in welchem die gesuchte Funktion und ihre unbekannten Fundamentalgleichungen etwas komplizierter sind.

Zu diesem Zwecke suchen wir diejenige B-Funktion, für welche die entsprechende ω-Funktion in folgender Form gegeben ist:

$$(1) \qquad y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho} C^{\sigma}(x),$$

wo C eine willkürliche Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter σ bezeichnet. Um diese ω-Funktion näher zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß (1) folgender Differentialgleichung Genüge leistet:

$$y^{(2)} + \frac{1-2\varrho}{x} y^{(1)} + \left(1 + \frac{\varrho^2 - \sigma^2}{x^2}\right) y = 0,$$

d. h., daß:

$$\Delta_{\nu}(y) = \frac{2\varrho}{x} y^{(1)} + \frac{\sigma^2 - \nu^2 - \varrho^2}{x^2} y$$

sein muß. Drückt man nun die Derivierte $y^{(1)}$ durch § 1, (3), (4) aus, so findet man weiter:

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta_\nu\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho} C^{\sigma}(x)\right) = \\ \quad = \frac{\varrho+\nu-\sigma}{2}\cdot\frac{\varrho-\nu-\sigma}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-2} C^{\sigma}(x) + \varrho\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1} C^{\sigma-1}(x), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta_\nu\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho} C^{\sigma}(x)\right) = \\ \quad = \frac{\varrho+\nu+\sigma}{2}\cdot\frac{\varrho-\nu+\sigma}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-2} C^{\sigma}(x) - \varrho\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1} C^{\sigma+1}(x); \end{cases}$$

man kann also offenbar mit Vorteil:

$$(4)\quad \begin{cases} \omega^{\nu}(x) = \omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = \\ \quad = \dfrac{2\Gamma(\varrho)\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho+\sigma)\, C^{\sigma}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu-\sigma}{2}\right)} \end{cases}$$

setzen; die Formeln (2), (3) geben dann:

$$(5)\quad \Delta_\nu\left(\frac{(\varrho+\sigma)^2-\nu^2}{4\varrho(\varrho+1)x}\,\omega^{\nu,\varrho+2,\sigma}(x)\right) = \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho+1,\sigma-1}(x) - \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x),$$

$$(6)\quad \Delta_\nu\left(\frac{(\varrho-\sigma)^2-\nu^2}{4\varrho(\varrho+1)x}\,\omega^{\nu,\varrho+2,\sigma}(x)\right) = \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho+1,\sigma+1}(x) - \frac{1}{x}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x).$$

Bezeichnet man nun mit $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ die zu (4) gehörige B-Funktion, so erhält man aus (5), (6) die folgenden zwei Fundamentalformeln:

$$(7)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) - \Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma-1}(x) = -\frac{(\varrho+\sigma)^2-\nu^2}{4\varrho(\varrho+1)x}\cdot\omega^{\nu,\varrho+2,\sigma}(x),$$

$$(8)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) - \Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma+1}(x) = -\frac{(\varrho-\sigma)^2-\nu^2}{4\varrho(\varrho+1)x}\cdot\omega^{\nu,\varrho+2,\sigma}(x);$$

beachtet man noch, daß:

$$(9)\quad \begin{cases} \omega^{\nu,\varrho+1,\sigma}(x) = \dfrac{2\varrho x}{(\varrho+\nu-1)^2-\sigma^2}\,\omega^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x) = \\ \quad = -\dfrac{2\varrho x}{(\varrho-\nu-1)^2-\sigma^2}\,\omega^{\nu+1,\varrho,\sigma}(x) \end{cases}$$

ist, so kann man die Formeln (7), (8) auch auf folgende Form bringen:

$$(10)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) - \Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma-1}(x) = -\frac{\varrho+\sigma-\nu}{2\varrho(\varrho-\sigma+\nu)}\cdot\omega^{\nu-1,\varrho+1,\sigma}(x),$$

$$(11)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) - \Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma+1}(x) = \frac{\varrho-\sigma+\nu}{2\varrho(\varrho+\sigma-\nu)}\cdot\omega^{\nu+1,\varrho+1,\sigma}(x).$$

Subtrahiert man jetzt die Formeln (7), (8) und setzt man $\varrho-1$ für ϱ, $\sigma+1$ für σ, so findet man die erste Reduktionsformel:

$$(12)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) - \Pi^{\nu,\varrho,\sigma+2}(x) = \frac{\sigma+1}{\varrho x}\cdot\omega^{\nu,\varrho+1,\sigma+1}(x).$$

Um eine ähnliche Reduktion von ϱ zu erhalten, setzt man in (11) $\varrho+1$ für ϱ und $\sigma-1$ für σ; addiert man nun die so erhaltene Formel zu (10), so erhält man:

$$(13)\quad \begin{cases} \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)-\Pi^{\nu,\varrho+2,\sigma}(x)= \\ =-\frac{\varrho+\sigma-\nu}{2\varrho(\varrho-\sigma+\nu)}\,\omega^{\nu-1,\varrho+1,\sigma}(x)+\frac{\varrho-\sigma+\nu+2}{2(\varrho+1)(\varrho+\sigma-\nu)}\,\omega^{\nu+1,\varrho+2,\sigma-1}(x). \end{cases}$$

Die eigentlichen Fundamentalgleichungen lassen sich nun auch bequem herleiten; sucht man zuerst die Funktion z_ν, so findet man aus § 1, (4):

$$\frac{\nu}{x}\,\omega^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x)-D_x\omega^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x)=$$
$$=\frac{2\varrho-2}{\varrho-\nu-\sigma-1}\,\omega^{\nu,\varrho-1,\sigma}(x)-\frac{\varrho+\nu+\sigma-1}{\varrho-\nu-\sigma-1}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma+1}(x);$$

wendet man noch (11) und (9) an, so bekommt man, nachdem man $\nu+1$ für ν gesetzt hat:

$$\frac{1}{x}\left(f^\nu(x)-g^\nu(x)\right)=\Pi^{\nu+1,\varrho-1,\sigma}(x)-\Pi^{\nu+1\varrho,\sigma}(x)-\frac{1}{2\varrho-2}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x).$$

Zur Bestimmung der Funktion y_ν dient die aus § 1, (3) gewonnene Formel:

$$-\frac{\nu}{x}\,\omega^{\nu+1,\varrho,\sigma}(x)-D_x\omega^{\nu+1,\varrho,\sigma}(x)=$$
$$=\frac{2-2\varrho}{\varrho+\nu+\sigma-1}\,\omega^{\nu,\varrho-1,\sigma}(x)+\frac{\varrho-\nu-\sigma-1}{\varrho+\nu+\sigma-1}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma-1}(x);$$

somit ergeben dieselben Formeln, wie vorher:

$$\frac{1}{x}\left(f^\nu(x)+g^\nu(x)\right)=\Pi^{\nu-1,\varrho-1,\sigma}(x)-\Pi^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x)-\frac{1}{2\varrho-2}\,\omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x).$$

Bildet man nun die zugehörigen Fundamentalformeln § 25, (1), (2), so findet man, nachdem man noch $\varrho+1$ für ϱ gesetzt:

$$(14)\quad \Pi^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x)-\Pi^{\nu+1,\varrho,\sigma}(x)=2D_x\Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma}(x)-\frac{1}{\varrho}\cdot\omega^{\nu,\varrho+1,\sigma}(x),$$

$$(15)\quad \Pi^{\nu-1,\varrho,\sigma}(x)+\Pi^{\nu+1,\varrho,\sigma}(x)=\frac{2\nu}{x}\Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma}(x),$$

Formeln, welche in der Tat ganz analog zu denjenigen sind, welche wir früher für die Lommelsche Funktion gefunden haben.

Man findet nun ohne Mühe auch die entsprechenden Fundamentalgleichungen für folgende drei Funktionen:

$$(16)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)+\Pi^{\nu,\varrho+1,\sigma}(x),\qquad \Pi^{\nu,\varrho+\nu,\sigma}(x),\qquad \Pi^{\nu,\varrho,\nu+\sigma}(x);$$

wir gehen indessen auf diese Formeln nicht näher ein.

§ 39. Reihenentwicklungen für $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$.

Die Fundamentalformeln, welche wir soeben entwickelt haben, gestatten uns, für $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ mehrere verschiedene Reihenentwicklungen zu bilden. Wir gehen zuerst von § 38, (8) aus und haben also vor allem folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{n=\infty} \Pi^{\nu,\varrho+n,\sigma+n}(x);$$

nun ergeben § 3, (8) und (Γ_{10}) ohne weiteres, daß:

$$\lim_{n=+\infty} \omega^{\nu,\varrho+n,\sigma+n}(x) = -\frac{b(\varrho)}{\pi} \cdot \frac{2\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho+\sigma)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu-\sigma}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-\sigma-1}$$

sein muß, falls wir

$$C^{\sigma}(x) = a(\sigma)J^{\sigma}(x) + b(\sigma)Y^{\sigma}(x)$$

setzen; also finden wir:

$$\lim_{n=+\infty} \Pi^{\nu,\varrho+n,\sigma+n}(x) = -\frac{b(\sigma)}{\pi}\Pi^{\nu,\varrho-\sigma}(x). \tag{1}$$

Dieser Grenzwert stellt also eine Lommelsche Funktion dar, und § 38, (8) liefert somit folgende Entwicklung:

$$\left\{\begin{aligned} \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) &= -\frac{b(\sigma)}{\pi}\Pi^{\nu,\varrho-\sigma}(x) + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho+\sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu-\sigma}{2}\right)}\cdot \\ &\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\varrho+s)\,C^{\sigma+s}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+\sigma}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+\sigma}{2}+s+1\right)}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

die in der ganzen x-Ebene gültig ist.

Geht man dagegen von § 38, (13) aus, so findet man folgende Entwicklung:

$$\left\{\begin{aligned} \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) &= C^{\sigma}(x)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}A_{2s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s} + \\ &+ C^{\sigma-1}(x)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}A_{2s+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s+1}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die ebenso in der ganzen x-Ebene anwendbar ist, und in welcher man der Kürze halber:

$$(4)\qquad \frac{\Gamma(\varrho+2s)\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho+\sigma+2s)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\sigma+\nu}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+\sigma-\nu}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\sigma+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu-\sigma}{2}+s+1\right)}=A_{2s},$$

$$(5)\qquad \frac{4(\varrho+2s)A_{2s}}{(\varrho+\sigma+2s)^2-\nu^2}=A_{2s+1}$$

gesetzt hat. Die Entwicklung (3) ist derjenigen von $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ sehr ähnlich. Setzt man wirklich voraus, daß die Cylinderfunktion H_2 ist, und setzt man weiter $\sigma=-\frac{1}{2}$, $\varrho+\frac{1}{2}$ für ϱ, so findet man auch, daß:

$$(6)\qquad \Pi^{\nu,\varrho+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\pi i^{\varrho-\nu}}\Phi^{\nu,\varrho}(x)$$

sein muß.

Die Entwicklungen (2), (3) sind beide anwendbar, wenn $C^\sigma(x)$ eine willkürliche Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter σ bedeutet; wenn diese Funktion dagegen speziell von der ersten Art ist, so findet man aus § 38, (12) folgende Entwicklung:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)&=\frac{\Gamma(\varrho)\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1}}{2\pi^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(\sigma-\nu-\varrho)\sin\pi(\nu-\varrho+\sigma)\cdot\\&\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(\sigma+2s+1)\times\\&\times\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu-\varrho}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu-\varrho}{2}+s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu+\varrho}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu+\varrho}{2}+s+1\right)}\cdot J^{\sigma+2s+1}(x),\end{aligned}\right.$$

die gleichfalls in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

Die speziellere Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$, welche in (7) auftritt, läßt sich endlich auch durch die Methode des § 31 entwickeln; mit Zuhilfenahme der Gaußschen Formel (F_2) findet man:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)&=\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\cdot\frac{\sin\pi(\nu-\varrho+\sigma)}{\sin\pi(\nu-\varrho-\sigma)}\cdot\Pi^{\nu,\varrho+\sigma}(x)+\\&+\frac{\omega^{\nu,\varrho,\sigma}(x)}{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-1}J^\sigma(x)\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho+\sigma)}\times\\&\times\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+\sigma}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+\sigma}{2}\right)}{s!\,\Gamma(\sigma+s+1)}A^{\nu,\varrho+\sigma,s}(x),\end{aligned}\right.$$

eine Formel, welche wiederum in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

§ 40. Spezialfälle der Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$.

Die ω-Funktion § 38, (4) muß offenbar verschwinden, falls man

(1) $$\varrho = \pm \nu \pm \sigma - 2n$$

voraussetzt, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, d. h. die zugehörige Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ muß der Besselschen Differentialgleichung Genüge leisten oder, was dasselbe ist:

(2) $$\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = pJ^{\nu}(x) + q\,Y^{\nu}(x)$$

sein, wo p und q noch unbekannte Funktionen von ν und σ bedeuten, die aber von x unabhängig sein müssen.

Wir haben nun jeden der vier in (1) angegebenen Spezialfälle für sich zu untersuchen.

1) $\varrho = \nu + \sigma - 2n$; die Formel § 39, (2) ergibt unmittelbar:

(3) $$\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = -\frac{b(\sigma)}{\pi} J^{\nu}(x).$$

2) $\varrho = \nu - \sigma + 2n$. Die Entwicklung rechter Hand in § 39, (2) teilt sich in zwei verschiedene Reihen, von welchen sich die erste als eine Reihe von positiven ganzen Potenzen von x, mit x^{ν} multipliziert, darstellt, während die andere eine Reihe von ganzen Potenzen von x, mit $x^{\nu-2\sigma}$ multipliziert, sein muß. Nun ist offenbar, daß die Gleichung (2) dann und nur dann bestehen kann, wenn der letzte Ausdruck verschwindet; man findet also für $n = 0$ die Entwicklung:

(4) $$\Pi^{\nu,\nu-2\sigma}(x) = \Gamma(1+\sigma)\cos\sigma\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\binom{\sigma-\nu}{s}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+s}}{\Gamma(\nu+s+1)} J^{-\sigma-s}(x).$$

Berücksichtigt man noch die erste der oben erwähnten Reihen, so findet man durch eine Vergleichung mit (2), daß:

(5) $$\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = -\frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi}\left(a(\sigma) + b(\sigma)\cot\pi\sigma\right) J^{\nu}(x)$$

sein muß; also erhält man folgende neue Entwicklung:

(6) $$J^{\nu}(x) = \Gamma(1+\sigma) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{\sigma-\nu}{s}}{\Gamma(\nu+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+s} J^{\sigma+s}(x),$$

die demnach gleichfalls in der ganzen x-Ebene gültig ist und die wir später in § 106 durch eine ganz andere Methode herleiten und näher diskutieren werden.

3) $\varrho = -\nu - \sigma - 2n$; man findet hier auf dieselbe Weise, daß:

$$(7)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = -\frac{\sin\pi\sigma}{\pi}\left(a(\sigma) + b(\sigma)\cot\pi\sigma\right)\cos\pi(\nu+\sigma)\, J^{-\nu}(x)$$

sein muß, und außerdem zwei zu (4) und (6) analoge Entwicklungen.

4) $\varrho = -\nu + \sigma - 2n$; man findet leicht:

$$(8)\quad \Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x) = -\frac{b(\sigma)}{\pi}\cos\nu\pi\, J^{-\nu}(x).$$

Differentiiert man nun die Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ nach ν, ϱ oder σ und führt man nachher die Werte (1) ein, so findet man Funktionensysteme, die ganz analog sind mit den aus L, N und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ gebildeten. Auf diese Weise gewinnt man auch neue Darstellungen der Neumannschen Cylinderfunktion. Indessen ist diese Darstellungsweise so mannigfaltig, daß ihre detaillierte Diskussion uns hier zu weit führen würde. Hierzu kommt noch, daß die Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ in unseren allgemeinen Untersuchungen über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen überhaupt *nicht* auftritt. Wir müssen uns daher auf diese Andeutungen über die Analogie zwischen $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ und den vorhergehenden Funktionen $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ und $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ beschränken; es geht ja doch hieraus deutlich genug hervor, daß die altbekannten Funktionen $O^n(x)$, $S^n(x)$, $T^n(x)$ und die analogen $\mathfrak{O}^n(x)$, $\mathfrak{S}^n(x)$, $\mathfrak{T}^n(x)$ nur vereinzelte Repräsentanten ganzer Funktionensysteme sein können, welche eine ähnliche Teilung des Ausdruckes für $Y^n(x)$ gestatten; somit ist die Bezeichnung „Besselsche Funktionen der zweiten Art“ auch für diese Funktionen durchaus hinfällig geworden.

Wir erwähnen noch, daß die Anwendungen der Funktion $\Pi^{\nu,\varrho,\sigma}(x)$ auf Reihen und Integrale auf der Hand liegen; durch Spezialisierungen der so erhaltenen Reihen findet man zum Beispiel die zwei Fundamentalreihen § 117, (6) und § 118, (1).

Kapitel VII.

Allgemeine Integraldarstellungen von Schläfli und Sonin.

§ 41. Allgemeine Methode von Sonin.

Schon in § 25 Satz 1 haben wir darauf aufmerksam gemacht, daß die Differenz zweier Lösungen des dort aufgestellten Systemes von Fundamentalgleichungen (1), (2) immer eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν sein muß. Es ist in

der Tat sehr bemerkenswert, daß sich die allgemeinsten Integraldarstellungen mit elementaren Funktionen, welche man noch bisher für die Funktion $J^{\nu}(x)$ gefunden hat, immer als eine solche Differenz darstellen.

Sonin hat zuerst vorteilhafte, allgemeine Methoden zur Herleitung solcher Integraldarstellungen gefunden[1]; seine Methode tritt aber durch folgende Bemerkung noch deutlicher hervor. Wir denken uns, die gegebenen Funktionen $f^{\nu}(x)$ und $g^{\nu}(x)$ in § 25, (1), (2) enthielten außer den zwei eigentlichen Variabeln x und ν noch einen Parameter t; dasselbe wird dann im allgemeinen auch mit der zugehörigen Funktion $B^{\nu}(x)$ der Fall sein. Wir setzen daher:

$$(1)\qquad B^{\nu-1}(x,t) - B^{\nu+1}(x,t) = 2D_x B^{\nu}(x,t) + \frac{2}{x} f^{\nu}(x,t),$$

$$(2)\qquad B^{\nu-1}(x,t) + B^{\nu+1}(x,t) = \frac{2\nu}{x} B^{\nu}(x,t) + \frac{2}{x} g^{\nu}(x,t);$$

denken wir uns nun weiter, daß es möglich sei, einen Integrationsweg zwischen den Punkten a und b so zu bestimmen, daß:

$$(3)\qquad \int_a^b f^{\nu}(x,t)\,dt = 0, \quad \int_a^b g^{\nu}(x,t)\,dt = 0$$

ist, so finden wir offenbar aus (1) und (2):

$$(4)\qquad \int_a^b B^{\nu}(x,t)\,dt = C^{\nu}(x),$$

wo $C^{\nu}(x)$ eine Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν bezeichnet.

Diese neue Anwendung der B-Funktionen in der Theorie der Cylinderfunktionen zeigt aber deutlich die systematische Unlösbarkeit des Problemes der Integraldarstellung von Cylinderfunktionen; es kommt ausschließlich darauf an, die einfachsten derjenigen B-Funktionen zu bestimmen, welche den Bedingungen (3) genügen.

Als den einfachsten Fall betrachten wir mit Sonin[2]) die Funktion:

$$(5)\qquad B^{\nu}(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}\cdot t^{-\nu-1};$$

wir finden dann aus (1) und (2):

---

1) Denn die Integraldarstellungen von Hankel in Math. Ann. Bd. 1 leiden an dem Übelstand, im allgemeinen nicht geradlinig und mit reellem Integrationswege genommen werden zu können.

2) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 10; 1880.

(6) $$f^{\nu}(x, t) = 0, \quad g^{\nu}(x, t) = D_t\left(e^{\frac{x}{2}(t - t^{-1})} t^{-\nu}\right),$$

so daß die Bedingungen (3) sich auf die folgende eine reduzieren:

(7) $$\Big|_a^b e^{\frac{x}{2}(t - t^{-1})} \cdot t^{-\nu} = 0,$$

eine Bedingung, welcher man in den folgenden vier Fällen zu genügen weiß; bezeichnet man nämlich durch α und β solche Größen, daß sowohl $\Re(\alpha x) < 0$ als auch $\Re(\beta x) < 0$ ist, so findet man:

1) $a = \infty \cdot \alpha, \quad b = \infty \cdot \beta,$

2) $a = -\frac{0}{\alpha}, \quad b = -\frac{0}{\beta},$

3) $a = -\frac{0}{\alpha}, \quad b = \infty \cdot \beta,$

4) $\Re(axi) = \pm \infty, \quad \Re(bxi) = \pm \infty, \quad \Re(\nu) > 0,$

während in den drei ersten Fällen ν eine willkürliche endliche Größe bedeuten darf.

Wir bezeichnen die zu den oben gegebenen Grenzen gehörigen Integrale beziehentlich mit U_1, U_2, U_3, U_4 und haben also nun diese vier Integrale nacheinander zu diskutieren; bei dieser Diskussion folgen wir, mit Genehmigung des Verfassers, beinahe wortgetreu der Darstellung von Sonin; dagegen verzichten wir darauf, mit dem großen russischen Mathematiker die gefundenen Resultate zur Herleitung von Formeln und Fundamentaleigenschaften für die Cylinderfunktionen zu verwerten, weil eine solche Herleitung weder eigentlich systematisch noch recht einfach ist.

Das Integral U_1 wird sich als das interessanteste und das fruchtbarste der obenerwähnten vier Integrale erweisen.

§ 42. Diskussion von U_1. Integrale von Schläfli und Sonin.

Um das Integral U_1 näher diskutieren zu können, haben wir zuerst den Integrationsweg genauer festzustellen; wir denken uns denselben ohne Schleifen und so beschaffen, daß die Punkte $\alpha \cdot \infty$ und $\beta \cdot \infty$ durch eine unendlich ferne Linie verbunden sind, so daß für sämtliche Punkte dieser Linie $\Re(xt) = -\infty$ ist; weiter müssen wir annehmen, daß sich der Punkt $t = 0$ im Innern der so erhaltenen geschlossenen Kurve befindet; sonst wird das Integral dem Cauchyschen Satze zufolge immer gleich Null.

Um nun das so erhaltene Integral in eine Potenzreihe in x entwickeln zu können, setzen wir $tx = 2u$ und finden so:

$$(1) \qquad U_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \cdot \int_{\alpha' \cdot x}^{\beta' \cdot x} e^{u - \frac{x^2}{4u}} \cdot \frac{du}{u^{\nu+1}}, \quad \Re(\alpha') < 0, \quad \Re(\beta') < 0;$$

das so erhaltene neue Integral verdient für sich untersucht zu werden; wir bezeichnen es daher mit U_1' und wollen es im folgenden Paragraphen näher diskutieren.

Führt man nun in (1) statt $e^{-\frac{x^2}{4u}}$ die gewöhnliche Potenzreihe ein, so findet man ohne Mühe, daß U_1 ein Produkt aus $J^{\nu}(x)$ und einer periodischen Funktion von ν darstellen muß; denn das Integral genügt erstens den beiden Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen und läßt sich zweitens durch eine mit x^{ν} multiplizierte Reihe von geraden positiven Potenzen von x darstellen. Nun wird offenbar die direkte Bestimmung dieser periodischen Funktion von ν ziemlich schwierig; wir benutzen daher lieber das Integral (Γ_{13}) von Weierstraß und finden dann leicht folgende fundamentale Formel:

$$(2) \qquad J^{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\alpha \cdot \infty}^{\beta \cdot \infty} e^{\frac{x}{2}(t - t^{-1})} \cdot t^{-\nu - 1}\, dt,$$

vorausgesetzt, daß der Integrationsweg den oben gestellten Bedingungen genügt.

Nachdem wir also den Wert von U_1 gefunden haben, müssen wir das Integral noch so umformen, daß der Integrationsweg reell angenommen werden darf. Um dies zu erreichen, setzen wir:

$$\alpha = \beta = e^{\psi i}$$

und konstruieren einen Kreis mit dem Radius 1 und mit dem Zentrum im Anfangspunkte; weiter bezeichnen wir mit A den Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl von dem Anfangspunkte nach dem Punkte $e^{\psi i}$ auf der Kreisperipherie, während Ω den unendlich fernen Punkt dieses Strahles bezeichnet; dann läßt sich die Formel (2) auch folgendermaßen schreiben:

$$(3) \qquad 2\pi i\, J^{\nu}(x) = e^{2\nu\pi i} \cdot \int_{\Omega}^{A} + \int_{(A,A)} + \int_{A}^{\Omega},$$

wo der Integrationsweg (A, A) die von A bis A positiv, von $\varphi = \psi - 2\pi$ bis $\varphi = \psi$, genommene Kreisperipherie bezeichnet.

Nach diesen Überlegungen setzen wir im ersten und im zweiten Integrale rechter Hand in (3):

$$t = e^{\theta + \psi i}$$

und im zweiten Integrale $\varphi = \psi - \pi + \sigma$; reduzieren wir noch die Grenzen dieses letzten Integrales auf 0 und π, so finden wir schließlich:

$$(4)\quad \begin{cases} J^\nu(x) = \dfrac{e^{\nu(\pi-\psi)i}}{\pi} \cdot \left[\int\limits_0^\pi e^{-ix\sin\psi\cos\sigma} \cdot \cos(x\cos\psi\sin\sigma + \nu\sigma)\, d\sigma - \right. \\ \left. \qquad - \sin\nu\pi \cdot \int\limits_0^\infty e^{\frac{x}{2}\left(e^{\theta+\psi i} - e^{-\theta-\psi i}\right)} \cdot e^{-\nu\theta}\, d\theta \right], \end{cases}$$

wo man also voraussetzen muß, daß $\Re(xe^{\psi i}) < 0$ ist.

Diese allgemeine Formel (4) von Sonin[1]) hat den großen Vorteil, daß man, wenn x gegeben ist, so über ψ disponieren kann, daß (4) anwendbar wird; x darf jedoch nicht gleich Null sein. Sieht man aber von dieser großen Allgemeinheit der obenerwähnten Formel ab, so kann man viel elegantere Darstellungen finden, wenn man ψ passende spezielle Werte gibt. Setzt man zum Beispiel $\psi = \pi$, so findet man folgende schöne Formel:

$$(5)\quad J^\nu(x) = \Psi^\nu(x) - \frac{\sin\nu\pi}{\pi} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-x\,\mathfrak{sin}\,\theta} e^{-\nu\theta}\, d\theta, \quad \Re(x) > 0,$$

welche von Schläfli[2]) gefunden worden ist; sie ist wohl als die erste allgemeine Integraldarstellung der J-Funktion anzusehen, die man überhaupt kennen lernte; die Funktion Ψ rechter Hand ist die in § 17 eingeführte, während $\mathfrak{sin}\,\theta$ den Hyperbelsinus bedeutet:

$$\mathfrak{sin}\,\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \cdot$$

Wenn ν eine ganze Zahl bedeutet, so geht die Formel (5) in das erste Besselsche Integral über.

Nimmt man in (4) $\Re(x) < 0$ an, so darf man $\psi = 0$ setzen und findet dadurch die Formel (5), wenn man nur das Zeichen von x ändert. In dem Falle, daß x eine rein imaginäre Größe mit negativem reellen Faktor bedeutet, darf man in (4) $\psi = \frac{3\pi}{2}$ annehmen und findet dann folgende Formel:

---

1) loc. cit. p. 14.

2) Annali di Matematica (2) Bd. 1, p. 237; 1868, Mathematische Annalen Bd. 3, p. 143; 1871.

$$(6)\qquad J^\nu(x) = \Phi^\nu(x) - \frac{\sin\nu\pi}{\pi i^\nu}\cdot\int\limits_0^\infty e^{-ix\operatorname{\mathfrak{Cos}}\theta}e^{-\nu\theta}d\theta,$$

die zwar direkt nur für den Fall bewiesen ist, daß ix positiv ist; sie muß indessen auch in dem viel allgemeineren Falle anwendbar sein, in welchem nur $\Re(ix) > 0$ vorausgesetzt wird. In der Tat sind ja die Funktionen beider Seiten in (6) holomorph in x, wenn die obenerwähnte Bedingung erfüllt ist; diese Funktionen sind also identisch, wenn $\Re(ix)$ positiv ist. Die Funktion $\operatorname{\mathfrak{Cos}}\theta$ bedeutet wie gewöhnlich den Hyperbelcosinus:

$$\operatorname{\mathfrak{Cos}}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

Die Formel (6) ist der Schläflischen ganz analog; sie ist von Sonin[1]) gefunden worden; setzt man ν als ganze Zahl voraus, so gewinnt man aus (6) das Hansensche Integral wieder.

Die Formeln (5), (6) zeigen noch einmal die Analogie der Funktionen Ψ und Φ. Wir kehren nun zur allgemeinen Formel (2) zurück und setzen:

$$\alpha = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)i},\quad \beta = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)i};$$

weiter denken wir uns, der Integrationsweg sei aus zwei geraden Linien von $\alpha\cdot\infty$ bis α und von $\beta\cdot\infty$ bis β und einem Kreisbogen C zusammengesetzt, der die Punkte α und β verbindet und sein Zentrum im Anfangspunkte hat; aus (2) finden wir dann:

$$2\pi i J^\nu(x) = \int\limits_{\alpha\cdot\infty}^{\alpha} + \int\limits_{C} + \int\limits_{\beta}^{\beta\cdot\infty}.$$

Wir setzen weiterhin in dem ersten und dritten der so erhaltenen Integrale $t = \alpha\cdot u$ und $t = \beta\cdot u$, während wir im zweiten Integrale $t = e^{\varphi i}$ setzen und die Grenzen auf 0 und $\frac{\pi}{2} + \omega$ reduzieren; dadurch finden wir folgende allgemeine Formel:

$$(7)\qquad \begin{cases} J^\nu(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\omega}\cos(x\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi + \\ \quad + \dfrac{1}{2\pi i}\cdot\displaystyle\int\limits_1^\infty\left(\beta^{-\nu}\cdot e^{\frac{x}{2}\left(\beta u - \frac{1}{\beta u}\right)} - \alpha^{-\nu}\cdot e^{\frac{x}{2}\left(\alpha u - \frac{1}{\alpha u}\right)}\right)\dfrac{du}{u^{\nu+1}}, \end{cases}$$

1) loc. cit. p. 17.

die also anwendbar ist, falls $\Re(\alpha x) < 0$ und $\Re(\beta x) < 0$ vorausgesetzt werden.

Offenbar ist diese Formel (7) wegen des letzten Integrales etwas kompliziert; es scheint nur einfacher zu werden, wenn man x als reell voraussetzt; in diesem Falle darf man $\omega = 0$ annehmen, und die Transformation $u = e^{-\sigma}$ gibt dann die Formel:

$$(8)\quad J^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} \sin\left(x\cos\sigma - \frac{\nu\pi}{2}\right)e^{-\nu\sigma}\,d\sigma,$$

die anwendbar ist, falls $\Re(\nu) > 0$ vorausgesetzt wird. Setzt man ν speziell gleich der ganzen Zahl n, so findet man aus § 20, (21) die einfachere Formel:

$$(9)\qquad J^{n}(x) = \Lambda^{n}(x) + \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} \sin\left(x\cos\sigma - \frac{n\pi}{2}\right)e^{-n\sigma}\,d\sigma.$$

§ 43. Diskussion des Integrales U_1'.

Wir haben im vorhergehenden Paragraphen bei unserer Herleitung der Formel (2) bemerkt, daß das dort auftretende Integral U_1' besondere Aufmerksamkeit verdient; in der Tat ist dies Integral von einer ähnlichen Bedeutung wie U_1 selbst. Um nun wirklich die Diskussion von U_1' durchführen zu können, setzen wir voraus, daß sich der Integrationsweg in einen Kreisbogen mit dem Zentrum in $u = 0$ und mit dem Radius $\frac{c}{2}$ und in eine Doppellinie $\frac{c}{2}\,e^{(\pi-\psi)i}$ zerlegt, wo man also $-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$ voraussetzen muß, weil ja $\Re\left(e^{(\pi-\psi)i}\right) < 0$ sein muß.

Wir setzen außerdem:

$$ce^{-\psi i} = h,\quad \Re(h) > 0$$

und finden somit aus § 42, (2):

$$(1)\qquad J^{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\left(\int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi} + (1 - e^{2\nu\pi i})\cdot\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}\infty}\right);$$

reduzieren wir nun die Grenzen des ersten Integrales rechter Hand auf 0 und π, während wir im zweiten Integrale:

$$u = -\frac{h}{2}\,e^{s}$$

setzen, so finden wir nach einigen Reduktionen:

$$(2)\quad \begin{cases} J^{\nu}(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^{\nu}}{\pi} \cdot \left[\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\frac{h^2 - x^2}{2h} \cos\varphi} \cos\left(\frac{h^2 + x^2}{2h} \sin\varphi - \nu\varphi\right) d\varphi - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \sin\nu\pi \cdot \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{h}{2}\left(e^s - \frac{x^2}{h^2} e^{-s}\right)} \cdot e^{-\nu s} ds \right], \end{cases}$$

eine Formel, welche von sehr großer Allgemeinheit ist.

Setzt man zum Beispiel $x = h$, so findet man die Formel von Schläfli in § 42, (5), während die Annahme $h = xi$ die Soninsche Formel in § 42, (6) gibt. Setzt man:

$$\frac{h^2 + x^2}{2h} = a, \quad \frac{h^2 - x^2}{2h} = b, \qquad \Re(a + b) > 0,$$

so erhält man aus (2) folgende Formel:

$$(3)\quad \begin{cases} J^{\nu}\left(\sqrt{a^2 - b^2}\right) = \dfrac{1}{\pi} \left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}}\right)^{\nu} \cdot \\ \cdot \left(\displaystyle\int_0^{\pi} e^{b \cos\varphi} \cos(a \sin\varphi - \nu\varphi) d\varphi - \sin\nu\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-a\,\mathfrak{Sin}(hs) - b\,\mathfrak{Cos}(hs)} e^{-\nu s} ds \right), \end{cases}$$

so daß die Annahme $\nu = 0$ die Besselsche Formel § 18, (3) liefert.

Dividiert man in (2) durch $(x : h)^{\nu}$ und setzt man $x = 0$ und $2h$ für h, so findet man folgende neue Formel:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{h^{\nu}}{\Gamma(\nu + 1)} = \dfrac{1}{\pi} \left(\displaystyle\int_0^{\pi} e^{h \cos\varphi} \cos(h \sin\varphi - \nu\varphi) d\varphi - \sin\nu\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-h e^s - \nu s} ds \right), \\ \qquad\qquad \Re(h) > 0. \end{cases}$$

Setzt man weiter in (2) $\Re(\nu) > 0$ voraus, so darf h rein imaginär sein, ohne daß die Formel ihre Anwendbarkeit einbüßt. Indem man $x = \sqrt{-2ah}$ annimmt, multipliziert man mit $h^{\frac{\nu}{2}}$; setzt man dann $h = 0$ und wieder h für a, so findet man:

$$(5)\quad 0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{h \cos\varphi} \cos(h \sin\varphi + \nu\varphi)\, d\varphi - \sin\nu\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-h e^{-s} - \nu s} ds \right).$$

Addiert und subtrahiert man nun die Formeln (4) und (5), so erhält man beziehentlich:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{h^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{h\cos\varphi}\cos(h\sin\varphi)\cos(\nu\varphi)\,d\varphi - \\ \qquad - \dfrac{\sin\nu\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-he^s} + e^{-he^{-s}}\right)e^{-\nu s}\,ds, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{h^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi e^{h\cos\varphi}\sin(h\sin\varphi)\sin(\nu\varphi)\,d\varphi - \\ \qquad - \dfrac{\sin\nu\pi}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-he^s} - e^{-he^{-s}}\right)e^{-\nu s}\,ds, \end{cases}$$

wo man voraussetzen muß, daß $\Re(\nu) > 0$, $\Re(h) > 0$ ist. Bedeutet ν eine ganze Zahl, so gehören die Formeln (6), (7) Poisson[1]) an.

Wir kehren nun zur Formel § 42, (2) zurück. Indem wir:

$$\alpha' = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)i}, \quad \beta' = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)i}$$

setzen, denken wir uns, daß sich der Integrationsweg aus einem Kreisbogen C mit dem Radius $\frac{c}{2}$ und dem Zentrum im Anfangspunkte und aus den zwei geraden Linien $\frac{c\alpha'}{2}$ und $\frac{c\beta'}{2}$ zusammensetze. Dieselben Rechnungen wie in § 42 ergeben dann:

$$2\pi i\left(\frac{2}{x}\right)^\nu J^\nu(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}-\omega}^{\frac{\pi}{2}+\omega} + \int_{\frac{c\beta'}{2}}^{\beta'\infty} - \int_{\frac{c\alpha'}{2}}^{\alpha'\infty},$$

also auch für $\omega = 0$ folgende neue Integraldarstellung:

$$(8)\quad \begin{cases} J^\nu(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{c}\right)^\nu}{\pi}\cdot\left[\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{c^2-x^2}{2c}\cos\varphi}\cos\left(\frac{c^2+x^2}{2c}\sin\varphi - \nu\varphi\right)d\varphi + \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\frac{c}{2}e^s + \frac{x^2}{2c}e^{-s} - \frac{\nu\pi}{2}\right)e^{-\nu s}\,ds\right], \end{cases}$$

wo man voraussetzen muß, daß $\Re(\nu) > 0$ ist, und daß x^2 eine reelle Größe bedeutet. Die Formel (8) ist zu § 42, (8) analog.

Setzt man in (8) $-xi$ für x, so gewinnt man, wenn ν gleich der positiven ganzen Zahl n gesetzt wird, folgende weitere Formel:

---

1) Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 493; 1823.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} J^n(-xi) &= \frac{1}{\pi i^n}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi + \\ &+ \int\limits_0^{x} \sin\left(x\,\sin(hs) - \frac{n\pi}{2}\right)e^{-ns}ds\Bigg); \end{aligned}\right.$$

somit gibt die Hansensche Integralformel § 19, (1) folgende bemerkenswerte Identität von Sonin[1]):

$$(10)\qquad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{x\cos\varphi}\cos(n\varphi)\,d\varphi = \int\limits_0^{\infty} \sin\left(x\,\sin(hs) - \frac{n\pi}{2}\right)e^{-ns}ds,$$

welche übrigens Gubler[2]) neuerdings direkt abgeleitet hat.

Setzt man endlich in (8) $2c$ für c und dividiert man durch $(x:2c)^\nu$, so findet man für $x = 0$ die neue Formel:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{c^\nu}{\Gamma(\nu+1)} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi}\cos(c\sin\varphi - \nu\varphi)\,d\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \sin\left(ce^s - \frac{\nu\pi}{2}\right)e^{-\nu s}ds, \end{aligned}\right.$$

welche zu (4) analog ist.

§ 44. Diskussion der Integrale U_2 und U_3.

Die Diskussion der zwei Integrale U_2 und U_3 wird sehr erleichtert, wenn man folgendermaßen über den Integrationsweg disponiert:

Wir konstruieren mit dem Zentrum im Anfangspunkte und mit dem Radius 1 einen Kreis und bezeichnen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der negativen reellen Achse mit A, mit der negativen imaginären Achse mit B, mit der positiven reellen Achse mit C und mit der positiven imaginären Achse mit D, während S den unendlich fernen Punkt der negativen reellen Achse bedeuten mag.

1) loc. cit. p. 19.

2) Mathematische Annalen Bd. 49, p. 584; 1897.

Bezeichnet noch Ω einen willkürlichen Integrationsweg, so setzen wir immer der Kürze halber:

$$2\pi i \mathfrak{J}(\Omega) = \int_{\Omega} e^{x(t-t^{-1})} \cdot t^{-\nu-1} dt.$$

Mit diesen Bezeichnungen findet man also zum Beispiel:

$$U_1 = J^{\nu}(x) = \mathfrak{J}(SABCDAS)$$

und daraus:

(1) $$U_1 = \mathfrak{J}(CDA) - \mathfrak{J}(CAB) + (1 - e^{2\nu\pi i})\mathfrak{J}(AS).$$

Setzt man ferner:

$$U_2 = \mathfrak{J}(OCDABCO), \quad U_3 = \mathfrak{J}(OCDAS),$$

wo O den Ursprung bezeichnet, so findet man leicht;

(2) $$U_2 = (1 - e^{-2\nu\pi i})\mathfrak{J}(OC) + \mathfrak{J}(CDA) - e^{-2\nu\pi i}\mathfrak{J}(CBA),$$

(3) $$U_3 = \mathfrak{J}(OC) + \mathfrak{J}(CDA) + \mathfrak{J}(AS),$$

woraus unmittelbar folgende Identität hervorgeht:

(4) $$U_2 = e^{-2\nu\pi i} U_1 + (1 - e^{-2\nu\pi i}) U_3.$$

Setzt man weiterhin in dem oben gegebenen Integrale für $J^{-\nu}(x)$ statt t den Ausdruck $-e^{-\pi i} : t$, so findet man:

$$J^{-\nu}(x) = e^{\nu\pi i}\mathfrak{J}(OCDABCO) = e^{\nu\pi i} U_2,$$

so daß man endlich zu folgenden Formeln gelangt:

(5) $$U_2 = e^{-\nu\pi i} J^{-\nu}(x),$$

(6) $$U_3 = \frac{J^{-\nu}(x) - e^{-\nu\pi i} J^{\nu}(x)}{2i \sin \nu\pi} = \frac{1}{2} \cdot H_1^{\nu}(x),$$

wo $H_1^{\nu}(x)$ die erste Hankelsche Cylinderfunktion bedeutet.

Doch sind diese Formeln von keinem besonderen Interesse, weil die Integrationswege sehr kompliziert sind. In unseren Untersuchungen über die asymptotische Darstellung einer Cylinderfunktion werden wir daher noch andere weit bequemere Integraldarstellungen der Hankelschen Funktionen geben.

§ 45. Diskussion des Integrales U_4.

Das vierte und letzte der in § 41 eingeführten Integrale, U_4, läßt sich in folgender Form:

(1) $$U_4 = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i} \cdot \int_{k \pm \infty i}^{l \pm \infty i} e^{u - \frac{x^2}{4u}} \cdot u^{-\nu-1} du, \qquad \Re(\nu) > 0$$

darstellen, wo ∞ in den beiden Grenzen mit demselben Zeichen zu nehmen ist; wir nehmen stets das positive. Wir setzen nun in (1) des § 42 $\alpha' = \beta' = i$ und beachten, daß:

$$(2)\qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{0+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\cdot u^{-\nu-1}du = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{k+\infty i}^{0+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\cdot u^{-\nu-1}du = 0$$

sein muß, weil die Integrationswege $u = 0$ nicht einschließen. Addieren wir nun aber zu § 41, (1) die Summe der beiden Integrale (2), so finden wir:

$$(3)\qquad J^{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\int\limits_{k+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\cdot u^{-\nu-1}du,\qquad \Re(\nu) > 0$$

oder mit anderen Worten:

$$(4)\qquad U_4 = J^{\nu}(x).$$

Wir setzen weiterhin in § 42, (1) $\alpha' = \beta' = -i$ und addieren zu der so erhaltenen Formel die Summe folgender beiden Integrale:

$$(5)\qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{k-\infty i}^{0-\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\cdot u^{-\nu-1}du = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{0+\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4u}}\cdot u^{-\nu-1}du = 0$$

und finden so die weitere Formel:

$$(6)\qquad J^{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{k-\infty i}^{l+\infty i} e^{u-\frac{x^2}{4\pi}}\cdot u^{-\nu-1}du,\qquad \Re(\nu) > 0.$$

Es ist wohl zu beachten, daß die Integrationswege in (3) und (6) die reelle positive Achse schneiden müssen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, die beiden Integrale offenbar gleich Null sein müßten.

Wir betrachten die Formel (6) näher und setzen $l = k$, so daß $\Re(k) > 0$ sein muß; dann darf nämlich das Integral längs einer geraden Linie genommen werden, welche vom Punkte k ausgeht und mit der imaginären Achse parallel läuft. Bezeichnen wir außerdem durch a eine reelle und zwar positive Konstante und setzen wir hierüber $2u = a(k + ri)$, so finden wir:

$$(7)\qquad J^{\nu}(x) = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri) - \frac{x^2}{2a(k+ri)}} \cdot (k+ri)^{-\nu-1} dr, \qquad \Re(\nu) > 0.$$

Transformiert man auf ähnliche Weise das analoge Integral, für welches der geradlinige Integrationsweg mit der imaginären Achse parallel läuft, aber vom Punkte $-k$ ausgeht, so findet man dagegen folgende Formel:

$$(8)\qquad 0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(k+ri) + \frac{x^2}{2a(k+ri)}} \cdot (k+ri)^{-\nu-1} dr, \qquad \Re(\nu) > 0,$$

welche in Sonins[1]) Untersuchungen über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen eine wichtige Rolle spielt.

Dividiert man jetzt die Formel (7) durch x^{ν} und setzt man $x = 0$, so erhält man aus (7), (8):

$$(9)\qquad \frac{a^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)} \cdot (k+ri)^{-\nu-1} dr, \qquad \Re(\nu) > 0,$$

$$(10)\qquad 0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}(k+ri)} \cdot (k+ri)^{-\nu-1} dr, \qquad \Re(\nu) > 0$$

zwei Formeln, die schon von Cauchy[2]) gefunden worden sind; die erste ist also in der Tat eine Integraldarstellung des reziproken Wertes der Gammafunktion.

Es ist bemerkenswert, daß uns unsere allgemeinen Integraldarstellungen für die Cylinderfunktion mit Leichtigkeit auf das erste Besselsche Integral führten; dagegen scheint der Übergang zum zweiten Besselschen Integrale etwas schwieriger zu sein. Um aber auch diesen Übergang bewerkstelligen zu können, gehen wir von der bekannten Formel:

$$(11)\qquad \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt^2} \cos(ty)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}, \qquad \Re(x) > 0$$

aus, welche wir unmittelbar herleiten können, wenn wir statt $\cos(yt)$ die gewöhnliche Potenzreihe einführen und dann gliedweise integrieren, was offenbar erlaubt ist. Wir werden übrigens später in § 70, (7) die Formel (11) noch verallgemeinern.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 38; 1880.

2) Citat von Sonin, loc. cit. p. 26.

Setzt man nun in (11) x für y und $\frac{a}{2}(k+ri)$ für x und führt man das so erhaltene Integral in (7) an Stelle der Exponentialfunktion ein, so erhält man nach einer sicherlich gestatteten Umkehrung der Integrationsfolge folgende neue Formel:

$$(12)\quad \begin{cases} J^\nu(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^\nu \cdot \\ \cdot \int\limits_0^\infty \cos(xt) \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{a}{2}(1-t^2)(k+ri)} \cdot (k+ri)^{-\nu-\frac{1}{2}}\, dr\right) dt; \end{cases}$$

wendet man weiterhin die Formel (10) an, so erhellt, daß das zuerst zu bestimmende Integral gleich Null sein muß, falls $t^2 > 1$ ist, so daß sich die obere Integrationsgrenze für t auf $+1$ reduziert. Das so erhaltene Integral läßt sich aber unmittelbar aus (9) bestimmen, und somit ist auch der zweite Besselsche Integralausdruck für die Cylinderfunktion $J^\nu(x)$ gefunden.

§ 46. Integraldarstellungen von $Y^\nu(x)$, $S^n(x)$, $O^n(x)$, $\mathfrak{S}^n(x)$ und $\mathfrak{O}^n(x)$.

Die zwei allgemeinen Integraldarstellungen des § 42, (5) und (6) ermöglichen uns für die fünf oben genannten Funktionen unschwer ähnliche Formeln zu finden. Wir gehen zunächst von § 42, (5) aus, bringen die einander sehr ähnlichen Formeln § 3, (2) für $Y^\nu(x)$ und § 17, (21) für $\Omega^\nu(x)$ in Anwendung und finden somit für die Neumannsche Cylinderfunktion ohne weiteres folgende Integraldarstellung:

$$(1)\quad Y^\nu(x) = \Omega^\nu(x) - \int\limits_0^\infty e^{-x \sin\theta}\left(e^{\nu\theta} + \cos\nu\pi \cdot e^{-\nu\theta}\right) d\theta, \quad \Re(x) > 0,$$

die für ganze ν von Schläfli[1]) gefunden wurde.

Ziehen wir jetzt § 42, (6) in Betracht und erinnern wir uns der Identität:

$$\Phi^{-\nu}(x) = e^{\nu\pi i} \cdot \Phi^\nu(x),$$

so finden wir nach einer einfachen Rechnung folgende von Heine[2]) für ganzzahlige ν gefundene Integraldarstellung:

1) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 147; 1871.

2) Journal für Mathematik Bd. 69, p. 140; 1869.

$$(2)\qquad Y^\nu(x) + iJ^\nu(x) = -\frac{2i^\nu}{\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-ix\cos\theta}\cdot\cos(\nu\theta)\,d\theta,\qquad \Re(xi) > 0$$

und bemerken, daß sich diese Formel (2) auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(3)\qquad H_2^\nu(x) = \frac{2i^{\nu+1}}{\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-ix\cos\theta}\cdot\cos(\nu\theta)\,d\theta,\qquad \Re(xi) > 0,$$

wo $H_2^\nu(x)$ die zweite Hankelsche Cylinderfunktion bedeutet.

Differentiieren wir nun die Formel § 42, (5) nach ν und setzen dann ν gleich der ganzen Zahl n, so gewinnen wir mittelst § 17, (27) die Formel:

$$2\left(D_\nu J^\nu(x)\right)_{\nu=n} + T^n(x) = \Omega^n(x) - (-1)^n 2\cdot\int_0^\infty e^{-x\sin\theta} e^{-n\theta}\,d\theta;$$

mit Zuhilfenahme von § 3, (16) liefert demnach (1) folgende neue Integraldarstellung:

$$(4)\qquad S^n(x) = \int_0^\infty e^{-x\sin\theta}\left(e^{n\theta} - (-1)^n e^{-n\theta}\right)d\theta,\qquad \Re(x) > 0;$$

sie ist zuerst von Schläfli[1]) aufgestellt worden.

Gehen wir jetzt von § 42, (6) aus, so finden wir auf dieselbe Weise durch Benutzung von § 19, (10):

$$2\left(D_\nu J^\nu(x)\right)_{\nu=n} + \mathfrak{T}^n(x) = iJ^n(x) - \frac{2i^n}{\pi}\cdot\int_0^\infty e^{-ix\cos\theta} e^{-n\theta}\,d\theta,$$

so daß sich aus (2) mittelst § 6, (9) die zu (4) analoge Darstellung ergibt:

$$(5)\qquad \mathfrak{S}^n(x) = 2\cdot i^n\int_0^\infty e^{-ix\cos\theta}\sin(n\theta)\,d\theta,\qquad \Re(xi) > 0.$$

Nun ist es auch sehr leicht, Integralausdrücke für die Funktionen $O^n(x)$ und $\mathfrak{O}^n(x)$ zu gewinnen; in der Tat ergeben sich aus den Definitionen dieser Funktionen § 30, (24) und § 36, (16) ohne weiteres folgende zwei Identitäten:

$$(6)\qquad S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x) = 4\,O^n(x);\quad \mathfrak{S}^{n-1}(x) + \mathfrak{S}^{n+1}(x) = 4\,\mathfrak{O}^n(x),$$

welche wir übrigens später in § 112 durch eine allgemeine Methode herleiten werden. Eine Anwendung von (6) liefert inzwischen mittelst (4) und (5) die folgenden Formeln:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 146; 1871.

$$(7) \qquad O^n(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-x \sin\theta} (e^{n\theta} + (-1)^n e^{-n\theta}) \cos\theta \, d\theta, \qquad \Re(x) > 0$$

$$(8) \qquad \mathfrak{O}^n(x) = i^{n+1} \cdot \int_0^{\infty} e^{-ix\cos\theta} \cos(n\theta) \cdot \sin\theta \, d\theta, \qquad \Re(xi) > 0.$$

Die Formel (7) ist ohne Beweis von Neumann[1]) angegeben; Sonin[2]) hat sie durch andere Methoden bewiesen.

Wir bemerken beiläufig, daß die Formelpaare (4) und (5), (7) und (8) die Analogie zwischen den beiden Funktionenpaaren $S^n(x)$ und $O^n(x)$, $\mathfrak{S}^n(x)$ und $\mathfrak{O}^n(x)$ beträchtlich verstärken; aber erst in § 112 wird diese Analogie durch unsere allgemeinen Untersuchungen über die Neumannschen Reihen erster Art völlig klargelegt werden.

Kapitel VIII.

Lineare Differentialgleichungen für die Cylinderfunktionen.

§ 47. Transformationen der Besselschen Gleichung.

Nachdem wir unsere Untersuchungen über die Fundamentalgleichungen der Cylinderfunktionen mit der Aufstellung allgemein gültiger Integralausdrücke für diese Funktionen abgeschlossen haben, wenden wir uns nunmehr zu denjenigen linearen Differentialgleichungen, welche sich mittelst Cylinderfunktionen integrieren lassen.

Wir setzen voraus, daß

$$y = F(x)$$

ein Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung:

$$(1) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = f(x)$$

sei, in welcher $f(x)$ eine gegebene Funktion bedeutet. Durch eine einfache Transformation der unabhängigen Variabeln finden wir dann leicht, daß:

$$z = F(\beta x^{\gamma})$$

folgender Gleichung genügen muß:

---

1) Theorie der Besselschen Funktionen p. 16; 1867.

2) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 7; 1880.

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} - \frac{\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) z = \beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} f(\beta x^\gamma).$$

Setzen wir außerdem:

$$z = x^{-\alpha} t,$$

so finden wir schließlich, daß die Funktion:

$$(3)\qquad t = x^\alpha F(\beta x^\gamma)$$

ein Integral der allgemeineren Gleichung:

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1-2\alpha}{x}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{x^2}\right) t = \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2}\cdot f(\beta x^\gamma)$$

sein muß.

Betrachten wir nun speziell die zu (4) gehörige homogene Gleichung, so sehen wir, daß sich ihr allgemeines Integral durch folgende Formel darstellen läßt:

$$(5)\qquad y = x^\alpha\left(c_1 J^\nu(\beta x^\gamma) + c_2 Y^\nu(\beta x^\gamma)\right),$$

wo c_1 und c_2 von x unabhängig sein müssen, sonst aber ganz willkürlich angenommen werden dürfen, ein Resultat, das wohl Lommel[1]) angehört.

Wir erkennen demnach, daß die Funktion:

$$(6)\qquad y = \sqrt{x}\, C^\nu(\beta x^\gamma)$$

einer homogenen linearen Differentialgleichung von der Form (4), aber ohne $y^{(1)}$ genügen muß.

Wir betrachten ferner speziell die Gleichung:

$$(7)\qquad y^{(2)} + b x^m y = 0$$

und finden aus (4), (5), daß ihr allgemeines Integral durch folgende Formel dargestellt wird:

$$(8)\qquad y = \sqrt{x}\left(c_1 J^{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right) + c_2 Y^{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right)\right),$$

ein Resultat, das man gleichfalls Lommel[2]) verdankt; wir setzen natürlich in (6) voraus, daß $m + 2 \neq 0$ ist, denn in diesem Falle wird ja (8) illusorisch; die entsprechende Gleichung läßt sich aber durch ganz elementare Methoden integrieren.

Wir spezialisieren noch die Gleichung (7), indem wir $b = 2$, $m = 1$ annehmen, so daß sie, wie folgt, lautet:

$$(9)\qquad y^{(2)} + 2xy = 0,$$

---

1) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 478; 1871.

2) Studien über die Besselschen Funktionen p. 113; 1868.

während sich ihr allgemeines Integral folgendermaßen darstellen läßt:

$$(10)\qquad y = \sqrt{x}\left(c_1 J^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right) + c_2\, Y^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\right).$$

In seinen Untersuchungen über die numerische Berechnung der Cylinderfunktion der ersten Art hat Meissel[1]) die Gleichung (9) gefunden, ohne jedoch zu bemerken, daß sich ihr Integral so einfach durch Cylinderfunktionen ausdrücken läßt, und daß es also auch überflüssig ist, ihre zwei partikulären Integrale einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Indessen erhöht ebendiese Form der obenerwähnten Integrale das Interesse an den von Meissel gefundenen Resultaten wesentlich.

§ 48. Integration der Riccatischen Gleichung.

Wir haben noch nachzuweisen, daß die Formeln § 47, (7), (8) uns gestatten, die Gleichung von Riccati[2]), d. h. folgende nicht lineare Gleichung erster Ordnung:

$$(1)\qquad y^{(1)} + \beta y^2 = a x^m$$

zu integrieren. Zu diesem Zwecke nehmen wir vorerst an, daß $\beta = 1$ sei, und setzen dann weiter mit Euler[3]):

$$(2)\qquad y = \frac{z^{(1)}}{z},$$

so daß wir für die neue Unbekannte z die Gleichung:

$$(3)\qquad z^{(2)} - a x^m z = 0,$$

also mittelst § 47, (8) als ihr allgemeines Integral den Ausdruck:

$$(4)\qquad z = \sqrt{x}\left(c_1 J^{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{-a}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right) + c_2\, Y^{\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2\sqrt{-a}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right)\right)$$

bekommen. Wenden wir weiterhin die Differentialformel § 1, (3) an, so ergibt eine einfache Rechnung:

$$(5)\qquad z^{(1)} = \sqrt{x}\left(c_1 J^{\frac{1}{m+2}-1}\left(\frac{2\sqrt{-a}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right) + c_2\, Y^{\frac{1}{m+2}-1}\left(\frac{2\sqrt{-a}}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}}\right)\right),$$

so daß wir nun unmittelbar durch (2) das allgemeine Integral von (1) für $\beta = 1$ finden; offenbar kann dieses allgemeine Integral nur

---

1) Jahresbericht der Oberrealschule in Kiel, 1892, p. 8.

2) Acta eruditorum suppl. Bd. 8, p. 66.

3) Citat von Duhamel: Éléments de calcul infinitésimal, Bd. II, p. 266. 4. Aufl.; Paris 1887.

eine willkürliche Konstante, $c_1 : c_2$, enthalten. Um die allgemeine Gleichung (1) zu integrieren, brauchen wir nur in dem eben gefundenen Integrale $x : \beta$ für x zu setzen.

In dem Spezialfalle $m = -2$, wo die vorhergehende Methode hinfällig wird, braucht man nur $z = xy$ zu setzen; (1) wird dann eine in y lineare Gleichung erster Ordnung.

Nachdem wir also die Riccatische Gleichung integriert haben, ist leicht einzusehen, daß sich das allgemeine Integral dieser Gleichung durch elementare Funktionen ausdrücken läßt, wenn man:

$$(6) \qquad \frac{1}{m+2} = p + \frac{1}{2}, \quad m = -\frac{4p}{2p+1}$$

setzt, wo p eine willkürliche ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle werden ja in der Tat die im allgemeinen Integrale auftretenden Cylinderfunktionen immer unter endlicher Form durch $\cos x$ und $\sin x$ ausdrückbar. Umgekehrt ist es nicht schwierig zu beweisen, daß sich das allgemeine Integral der Gleichung (1) in dieser Form nur darstellen läßt, wenn m der Bedingung (6) genügt. Die Formeln § 11, (8), (9) ermöglichen uns also, diesen bei den älteren Autoren[1]) sehr beliebten Spezialfall unmittelbar zu erledigen.

Sicher hat Schläfli[2]) zum ersten Male die Auflösung der Riccatischen Gleichung mittelst Cylinderfunktionen gegeben; indessen hat doch Lommel[3]) beinahe zu gleicher Zeit und offenbar, ohne Schläflis Arbeit zu kennen, eine ähnliche Lösung gefunden.

Wir haben indessen zu bemerken, daß schon Euler[4]) und später Raabe[5]), also noch zwanzig Jahre vor Schläfli und Lommel, die Gleichung § 47, (4) durch bestimmte Integrale integriert haben.

§ 49. Differentialgleichung für $x^\alpha e^{\pm i\beta x^\gamma} \cdot C^\nu(\beta x^\gamma)$.

Wir kehren nun zu der Gleichung § 47, (4) zurück und setzen:

$$(1) \qquad y = e^{\varrho x^\sigma} t,$$

so daß wir also für y folgende lineare Gleichung finden:

1) Z. B. Lacroix: Traité du calcul différential et intégral, Bd. 3, p. 537, 2. Aufl.; Paris 1819.
Duhamel: Éléments de calcul infinitésimal, Bd. 2, p. 267.

2) Annali di Matematica (2) Bd. 1; 1868.

3) Studien über die Besselschen Funktionen p. 112; 1868.

4) Institutiones calculi integralis Bd. 2, p. 298; 1769.

5) Differential- und Integralrechnung Bd. 3, p. 260 ff. Zürich 1847.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1-2\alpha}{x} - 2\varrho\sigma x^{\sigma-1}\right)\dfrac{\partial y}{\partial x} + \\ \qquad + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \varrho^2\sigma^2 x^{2\sigma-2} + (2\alpha-\sigma)\varrho\sigma x^{\sigma-2} + \dfrac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) y = \\ \qquad\qquad = \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2}\cdot e^{\varrho x^\sigma}\cdot f(\beta x^\gamma); \end{cases}$$

die Form dieser Gleichung zeigt deutlich, daß sie sich sehr vereinfachen muß, wenn wir:

$$(3)\qquad \varrho = \pm\beta i,\quad \sigma = \gamma$$

setzen; denn in diesem Falle finden wir mit der in § 47 angewendeten Bezeichnung, daß die Funktion:

$$(4)\qquad y = x^\alpha\cdot e^{\pm i\beta x^\gamma}\cdot F(\beta x^\gamma)$$

ein Integral der nicht homogenen Gleichung:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\dfrac{1-2\alpha}{x} \mp 2\beta\gamma i x^{\gamma-1}\right)\dfrac{\partial y}{\partial x} + \\ \qquad + \left(\dfrac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2} \mp \beta\gamma(\gamma-2\alpha)\, i x^{\gamma-2}\right) y = \\ \qquad\qquad = \beta^2\gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2}\cdot e^{\pm i\beta x^\gamma}\cdot f(\beta x^\gamma) \end{cases}$$

sein muß, so daß sich das allgemeine Integral der entsprechenden homogenen Gleichung folgendermaßen darstellen läßt:

$$(6)\qquad y = x^\alpha\cdot e^{\pm i\beta x^\gamma}\cdot\left(c_1 J^\nu(\beta x^\gamma) + c_2 Y^\nu(\beta x^\gamma)\right).$$

Wir betrachten folgende zwei Spezialfälle der eben erwähnten homogenen Gleichung:

$$(7)\qquad y^{(2)} + y^{(1)} + \frac{\frac{1}{4}-\nu^2}{x^2}\, y = 0,$$

$$(8)\qquad y^{(2)} + \left(\frac{2\nu+1}{x} - k\right) y^{(1)} - \frac{(2\nu+1)k}{2x}\, y = 0$$

und finden somit für ihr vollständiges Integral die Ausdrücke:

$$(9)\qquad y = \sqrt{x}\left(c_1 J^\nu\left(\frac{xi}{2}\right) + c_2 Y^\nu\left(\frac{xi}{2}\right)\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}},$$

$$(10)\qquad y = x^{-\nu}\left(c_1 J^\nu\left(\frac{kxi}{2}\right) + c_2 Y^\nu\left(\frac{kxi}{2}\right)\right)\cdot e^{\frac{kx}{2}},$$

die uns späterhin in § 57 sehr nützlich sein werden.

§ 50. **Differentialgleichungen dritter Ordnung.**

Wir differentiieren jetzt die in § 47 für die Funktion $x^\alpha C^\nu(\beta x^\gamma)$ erhaltene Differentialgleichung nach x:

$$(1)\qquad V(y) \equiv y^{(2)} + \frac{1-2\alpha}{x}\, y^{(1)} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) y = 0$$

und finden so, daß sich stets zwei partikuläre Integrale dieser Gleichung von der dritten Ordnung:

$$(2) \qquad \frac{\partial V(y)}{\partial x} + A\,V(y) = 0,$$

wo A eine in x durchaus willkürliche Funktion bedeutet, durch die obenerwähnte Funktion herstellen lassen.

Was nun die willkürliche Funktion A anbetrifft, so kann man sie entweder so bestimmen, daß rechter Hand in (2) einer der Koeffizienten von $y^{(2)}$, $y^{(1)}$, y einen gegebenen Wert annimmt, oder man verfügt über diese Funktion so, daß das dritte partikuläre Integral von (2) einer vorgegebenen Funktion von x gleich wird; denn man erhält aus (2):

$$(3) \qquad A = -D_x \log V(y),$$

so daß man A unmittelbar bestimmen kann, wenn man nur rechter Hand in (3) für y das gegebene partikuläre Integral einführt.

Wenn umgekehrt A gegeben ist, also das dritte partikuläre Integral von (2) gesucht wird, so findet man aus (3), daß dieses Integral auch folgender nicht homogener Gleichung von derselben Form wie § 47, (4) genügen muß:

$$(4) \qquad y^{(2)} + \frac{1-2\alpha}{x}\,y^{(1)} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) y = e^{-\int A\,dx}.$$

Setzt man zum Beispiel voraus, daß das dritte partikuläre Integral von (2) gleich e^x sein soll, so bestimmt man die Funktion A unmittelbar aus (3); der allgemeine Ausdruck für diese Funktion wird etwas kompliziert, dagegen findet man in folgenden Spezialfällen elegantere Resultate:

1) $\gamma = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = i, \quad A = \frac{2}{x} - 1;$

die Differentialgleichung:

$$(5) \qquad y^{(3)} + \left(\frac{2}{x} - 1\right) y^{(2)} - \left(1 + \frac{4\nu^2-1}{4x^2}\right) y^{(1)} + \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4\nu^2-1}{4x^2}\right) y = 0$$

hat dann das vollständige Integral:

$$(6) \qquad y = c_1 e^x + \sqrt{x}\left(c_2 J^\nu(xi) + c_3 Y^\nu(xi)\right).$$

2) $\alpha = \nu, \quad \beta = i, \quad A = \frac{1}{x} - 1;$

wir finden hier die Differentialgleichung:

$$(7) \qquad y^{(3)} + \left(\frac{2-2\nu}{x} - 1\right) y^{(2)} + \left(\frac{2\nu-1}{x} - 1\right) y^{(1)} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 0$$

mit dem vollständigen Integrale:

$$(8) \qquad y = c_1 e^x + x^\nu \left(c_2 J^\nu(xi) + c_3 Y^\nu(xi) \right).$$

3) $\alpha = \frac{\nu}{2}, \quad \beta = 2\sqrt{\nu - 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad A = -1;$

setzen wir noch $\nu + 1$ für ν, so finden wir, daß die Funktion:

$$(9) \qquad y = c_1 e^x + x^{\frac{\nu+1}{2}} \left(c_2 J^{\nu+1}(2\sqrt{\nu x}) + c_3 Y^{\nu+1}(2\sqrt{\nu x}) \right)$$

das vollständige Integral folgender Gleichung sein muß:

$$(10) \qquad y^{(3)} - \left(1 + \frac{\nu}{x}\right) y^{(2)} + \left(\frac{2\nu}{x} + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y^{(1)} - \left(\frac{\nu}{x} + \frac{\nu}{x^2}\right) y = 0.$$

Die in § 49 für die Funktion:

$$y = x^\alpha e^{\pm i\beta x^\gamma} \cdot C^\nu(\beta x^\gamma)$$

erhaltene Differentialgleichung:

$$U(y) = 0$$

läßt sich auf dieselbe Weise behandeln; wir beschränken uns indessen hier auf die Bestimmung der willkürlichen Funktion A in der Art, daß die Gleichung:

$$(11) \qquad \frac{\partial U(y)}{\partial x} + A\, U(y) = 0$$

als drittes partikuläres Integral den Wert e^x erhält. Wir finden dann, daß die zwei speziellen Gleichungen:

$$(12) \quad y^{(3)} + \left(\frac{2}{x} - 2\right) y^{(2)} + \left(\frac{1 - 4\nu^2}{4x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) y^{(1)} + \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} y = 0,$$

$$(13) \quad y^{(3)} + \left(\frac{2 - 2\nu}{x} - 1\right) y^{(2)} - \left(\frac{3(1 - 2\nu)}{x}\right) y^{(1)} + \frac{1 - 4\nu}{x} y = 0$$

zu vollständigen Integralen folgende Funktionen haben müssen:

$$(14) \qquad y = c_1 e^x + \sqrt{x} \left(c_2 J^\nu\left(\frac{xi}{2}\right) + c_3 Y^\nu\left(\frac{xi}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}},$$

$$(15) \qquad y = c_1 e^x + x^\nu \left(c_2 J^\nu\left(\frac{xi}{2}\right) + c_3 Y^\nu\left(\frac{xi}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Wir haben außerdem noch einen spezielleren Fall näher zu betrachten, weil derselbe in unseren Untersuchungen über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen eine wichtige Rolle spielt. Der Kürze halber setzen wir zu diesem Zwecke:

$$(16) \qquad \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv y^{(2)} + \frac{1 - 2\alpha}{x} y^{(1)} + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{x^2}\right) y$$

und finden:

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{a}{x} \cdot \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv y^{(3)} + \frac{1-2\alpha+a}{x} y^{(2)} + \\ \quad + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2-\gamma^2+(a-1)(1-2\alpha)}{x^2}\right) y^{(1)} + \\ \quad + \left(\frac{a\beta^2}{x} + \frac{(a-2)(\alpha^2-\gamma^2)}{x^3}\right) y. \end{cases}$$

Setzen wir weiter voraus, daß a eine von x unabhängige Konstante bedeutet, so erkennen wir, daß sich das vollständige Integral folgender linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(18)\qquad \frac{\partial \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{a}{x} \cdot \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$$

im allgemeinen folgendermaßen darstellen läßt:

$$(19)\qquad y = x^\alpha \left(c_1 J^\gamma(\beta x) + c_2 Y^\gamma(\beta x) + c_3 \Pi^{\gamma,\delta}(\beta x)\right),$$

wo Π die Lommelsche Funktion bedeutet; mittelst § 31, (1), (2) und § 47, (4) erhalten wir für den neuen Parameter δ folgenden Ausdruck:

$$(20)\qquad \delta = 2 - \alpha - a.$$

Wir setzen ferner:

$$(21)\quad \Delta'_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv y^{(2)} + \left(\frac{1-2\alpha}{x} - 2\beta i\right) y^{(1)} + \left(\frac{\alpha^2-\gamma^2}{x^2} - \frac{\beta(1-2\alpha)i}{x}\right) y$$

und finden:

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta'_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{a}{x} \Delta'_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv y^{(3)} + \left(\frac{1-2\alpha+a}{x} - 2\beta i\right) y^{(2)} + \\ \quad + \left(\frac{\alpha^2-\gamma^2+(a-1)(1-2\alpha)}{x^2} - \frac{1-2\alpha+2a}{x}\beta i\right) y^{(1)} + \\ \quad + \left(\frac{(a-2)(\alpha^2-\gamma^2)}{x^3} - \frac{(a-1)(1-2\alpha)\beta i}{x^2}\right) y; \end{cases}$$

die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(23)\qquad \frac{\partial \Delta'_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{a}{x} \cdot \Delta'_{\alpha,\beta,\gamma,} = 0,$$

wo a eine von x unabhängige Konstante bedeutet, muß also das vollständige Integral:

$$(24)\qquad y = x^\alpha e^{i\beta x}\left(c_1 J^\gamma(\beta x) + c_2 Y^\gamma(\beta x) + c_3 \Phi^{\gamma,\delta}(\beta x)\right)$$

haben, wo der neue Parameter δ immer aus (20) zu entnehmen ist.

§ 51. Differentialgleichungen vierter Ordnung.

Wir haben hier die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V(y)}{\partial x^2} + A \frac{\partial V(y)}{\partial x} + B V(y) = 0, \tag{1}$$

zu betrachten, wo $V(y)$ die in § 50 Formel (1) definierte Funktion bedeutet, während A und B in x willkürliche Funktionen darstellen. Offenbar lassen sich dann zwei der partikulären Integrale von (1) aus der Funktion:

$$x^\alpha C^\nu(\beta x^\gamma)$$

bestimmen; um die beiden anderen zu finden, haben wir die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$z^{(2)} + A z^{(1)} + B z = 0 \tag{2}$$

zu integrieren; wenn dies ausgeführt ist, finden wir die obenerwähnten partikulären Integrale durch Integration folgender nicht homogenen Gleichungen:

$$V(y) = z_1, \qquad V(y) = z_2, \tag{3}$$

die ganz dieselbe Form haben wie § 50, (4) und in denen z_1 und z_2 zwei partikuläre Integrale von (2) bedeuten.

Sind umgekehrt die beiden letzten partikulären Integrale y_1 und y_2 von (1) gegeben, so kann man die beiden Koeffizienten A und B durch folgende zwei Gleichungen ersten Grades:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V(y_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial V(y_1)}{\partial x} A + V(y_1) B = 0, \\ &\frac{\partial^2 V(y_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial V(y_2)}{\partial x} A + V(y_2) B = 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

bestimmen; denn die Determinante dieses Gleichungssystemes kann niemals verschwinden, wenn y_1 und y_2 wirklich von den Cylinderfunktionen und voneinander linear unabhängig sind.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir denjenigen Spezialfall näher untersuchen, in welchem sich y_1 und y_2 aus der Funktion:

$$x^\alpha C^\nu(i\beta x^\gamma)$$

bilden lassen. Bezeichnen wir der Kürze halber durch $V_1(y)$ die Funktion, welche wir aus $V(y)$ herleiten, indem wir βi für β setzen, so haben wir demnach die Koeffizienten A, B, A_1 und B_1 so zu bestimmen, daß wir die identische Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + A \frac{\partial V}{\partial x} + B V \equiv \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + B_1 V_1 \tag{5}$$

erhalten; eine einfache Rechnung gibt nun:

$$A = A_1 = \frac{5 - 2\alpha - 4\gamma}{x},$$

$$B = \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2 + 4(\gamma - 1)(\gamma + \alpha - 1)}{x^2} - \beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2},$$

so daß sich die gesuchte Gleichung folgendermaßen schreiben läßt:

$$(6) \quad y^{(4)} + \frac{6 - 4\alpha - 4\gamma}{x} y^{(3)} + \frac{a_1}{x^2} y^{(2)} + \frac{a_2}{x^3} y^{(1)} + (a_3 - \beta^4\gamma^4 x^{4\gamma-4})y = 0,$$

wo wir der Kürze halber:

$$a_1 = 2(\alpha^2 - \nu^2\gamma^2) + 4(\gamma - 1)(\gamma + \alpha - 1) + (1 - 2\alpha)(3 - 2a - 4\gamma),$$

$$a_2 = 2(\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)(1 - \alpha - 2\gamma) + (1 - 2\alpha)(1 - 2\gamma)(1 - 2\alpha - 2\gamma),$$

$$a_3 = (\alpha^2 - \nu^2\gamma^2)(6 - 2A + B + \beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2})$$

gesetzt haben.

Diese allgemeineren Koeffizienten lassen sich beträchtlich vereinfachen, wenn man über die Parameter speziellere Voraussetzungen macht; so findet man zum Beispiel für $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\nu}{2}$ die einfache Gleichung:

$$(7) \qquad y^{(4)} + \frac{4 - 2\nu}{x} y^{(3)} + \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{x^2} y^{(2)} - \frac{b^2}{16x^2} y = 0$$

mit dem vollständigen Integrale:

$$(8) \quad y = x^{\frac{\nu}{2}}\left(c_1 J^\nu(\sqrt{bx}) + c_2 Y^\nu(\sqrt{bx}) + c_3 J^\nu(\sqrt{-bx}) + c_4 Y^\nu(\sqrt{-bx})\right).$$

In den Spezialfällen $\nu = 0, 1, 2$ gewinnt man aus (7) folgende bemerkenswerten Gleichungen:

$$(9) \qquad 16x^2 y^{(4)} + 64xy^{(2)} + 32y^{(2)} - b^2 y = 0,$$

$$(10) \qquad 16x^2 y^{(4)} + 32xy^{(3)} - b^2 y = 0,$$

$$(11) \qquad 16x^2 y^{(4)} - b^2 y = 0.$$

Wir setzen ferner in (6) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2\nu}$ und finden so die Gleichung:

$$(12) \quad y^{(4)} + \frac{4\nu - 2}{\nu x} y^{(3)} + \frac{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{\nu^2 x^2} y^{(2)} - \frac{b^2}{16\nu^2} \cdot x^{\frac{2}{\nu} - 4} \cdot y = 0$$

mit ihrem vollständigen Integrale:

$$(13) \quad \begin{cases} y = \sqrt{x}\left[c_1 J^\nu\left(\sqrt{b} \cdot x^{\frac{1}{2\nu}}\right) + c_2 Y^\nu\left(\sqrt{b} \cdot x^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right] + \\ \qquad + c_3 J^\nu\left(\sqrt{-b} \cdot x^{\frac{1}{2\nu}}\right) + c_4 Y^\nu\left(\sqrt{-b} \cdot x^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right]; \end{cases}$$

für $\nu = 1$ erhalten wir hieraus wieder die Gleichung (10), die von Ostenfeld[1]) aufgestellt worden ist.

Aus § 50, (17) finden wir folgende Gleichung vierter Ordnung:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{b}{x^2}\Delta_{\alpha,\beta,\gamma} = y^{(4)} + \frac{1 - 2\alpha + a}{x}\, y^{(3)} + \\ &\qquad + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \gamma^2 + (a-2)(1 - 2\alpha + b)}{x^2}\right) y^{(2)} + \\ &\quad + \left(\frac{a\beta^2}{x} + \frac{(a-4)(\alpha^2 - \gamma^2) + (2 - a + b)(1 - 2\alpha)}{x^3}\right) y^{(1)} + \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{b\beta^2}{x^2} + \frac{(6 - 2a + b)(\alpha^2 - \gamma^2)}{x^4}\right) y. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir weiter voraus, daß a und b zwei von x unabhängige Konstanten bedeuten, so zeigt (2), daß sich das vollständige Integral dieser Gleichung vierter Ordnung:

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} + \frac{b}{x^2}\Delta_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$$

folgendermaßen darstellen läßt:

$$(16)\qquad y = x^{\alpha}\Big(c_1 J^{\gamma}(\beta x) + c_2 Y^{\gamma}(\beta x) + c_3 \Pi^{\gamma,\delta}(\beta x) + c_4 \Pi^{\gamma,\varepsilon}(\beta x)\Big);$$

die zwei neuen Parameter δ und ε lassen sich demnach durch die Wurzeln λ_1 und λ_2 der aus (2) erhaltenen Gleichung:

$$(17)\qquad \lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b = 0$$

folgendermaßen bestimmen:

$$(18)\qquad \delta = 2 + \lambda_1 - \alpha, \quad \varepsilon = 2 + \lambda_2 - \alpha;$$

auch dieses Resultat ist für unsere Untersuchung über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen von großem Nutzen. Wir verzichten dagegen auf die zu (14) analoge Formel für $\Delta'_{\alpha,\beta,\gamma}$, weil wir von dieser Formel keinen Gebrauch zu machen haben.

§ 52. **Differentialgleichungen willkürlicher Ordnung.**

Es leuchtet ein, daß die Methoden, welche wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzt haben, auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausgedehnt werden können; wir beschränken uns indessen auf die Untersuchung eines bemerkenswerten Spezialfalles. Zu diesem Zwecke setzen wir wie in § 50:

---

1) Bei seinen theoretischen Untersuchungen über die Schwingpartie der neuen Brücke „Langebro", welche Kopenhagen mit der Vorstadt Christianshavn verbindet.

$$V(y) = y^{(2)} + \frac{1-2\alpha}{x} y^{(1)} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{x^2}\right) y \tag{1}$$

und außerdem:

$$\mathfrak{B}(y) = V(y) - \beta^\varrho \gamma^2 x^{\alpha+\gamma\varrho-2}, \tag{2}$$

so daß die Funktion $x^\alpha \Pi^{\nu,\varrho}(\beta x^\gamma)$, mit einem passenden, von x unabhängigen Faktor multipliziert, ein partikuläres Integral der nicht homogenen Gleichung:

$$\mathfrak{B}(y) = 0 \tag{3}$$

sein muß.

Differentiiert man nun die Gleichung (3) wiederholt nach x, so findet man, daß:

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s}{x^s} \mathfrak{B}^{(n-s)}(y) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s}{x^s} V^{(n-s)}(y) - \beta^\varrho \gamma^2 G(\alpha+\gamma\varrho-2) x^{\alpha+\gamma\varrho-n-2} = 0 \tag{4}$$

sein muß, wo die Koeffizienten a_s von x unabhängig sind und wir der Kürze halber:

$$G(k) = a_n + \sum_{s=1}^{s=n} a_{n-s} \cdot k(k-1)\cdots(k-s+1) \tag{5}$$

gesetzt haben. Es ist nun nicht schwer, folgenden Satz zu beweisen:

Im allgemeinen läßt sich die Gleichung (4) *durch zwei Cylinderfunktionen und* $n+1$ *Lommelsche Funktionen vollständig integrieren.*

Daß ein partikuläres Integral von (4), von einem von x unabhängigen Faktor abgesehen, im allgemeinen eine Lommelsche Funktion sein muß, haben wir ja schon oben bemerkt. Nun ist ferner offenbar, daß die determinierende Gleichung für die zu (4) gehörige homogene Differentialgleichung genau:

$$G(k) = 0 \tag{6}$$

sein muß; denken wir uns also, daß die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{7}$$

sind, unter denen sich nicht zwei gleiche finden mögen, so wird das vollständige Integral von (4) durch die Funktion:

$$\left\{\begin{aligned} y = A \cdot x^\alpha \Pi^{\nu,\varrho}(\beta x^\gamma) + x^\alpha \left(c_1 J^\nu(\beta x^\gamma) + c_2 Y^\nu(\beta x^\gamma)\right) + \\ + \sum_{s=1}^{s=n} c_{s+2} \Pi^{\nu,\varrho_s}(\beta x^\gamma) \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dargestellt, wo wir der Kürze halber:

$$(9)\qquad A = \frac{2^{\varrho-2}\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}, \quad \varrho_s = \frac{\alpha_s-\alpha+2}{\gamma}$$

gesetzt haben.

Sind zwei oder mehrere der Wurzeln (7) einander gleich, so treten in (8) auch nach ϱ genommene Differentialquotienten der Lommelschen Funktion auf; dasselbe findet statt, wenn $\varrho_s = \pm\nu - 2p$, wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet.

Wir setzen weiter voraus, daß:

$$\alpha_s = \alpha_1 + p_s d, \quad d = 2\gamma, \quad s = 2, 3, \cdots, n,$$

wo die p_s ganze Zahlen bedeuten, und daß übrigens:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha + 2}{d} = \pm\nu + m$$

ist, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet; dann lassen sich die n letzten in (8) vorkommenden Lommelschen Funktionen nach § 30, (2) sämtlich durch endliche Reihen ersetzen.

In dem Spezialfalle $\alpha_1 = 0$, $p_s = 1$, $d = 1$ findet man folgenden bemerkenswerten Satz:

Differentiiert man die für die Funktion:

$$C^\nu(\sqrt{x})x^{\pm\frac{\nu}{2}-m+2}$$

erhaltene Besselsche Differentialgleichung n-mal nach x, so wird durch die zwei Cylinderfunktionen und durch n endliche Reihen ein Fundamentalsystem von Integralen der so erhaltenen homogenen linearen Differentialgleichung $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt.

§ 53. Einige Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen.

Indem wir mit ν eine endliche, aber sonst ganz willkürliche Konstante bezeichnen, suchen wir mit Neumann[1]) für folgende partielle Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)u = 0,$$

wo

$$(2)\qquad r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$$

gesetzt wird, ein Integral, das eine Funktion von r allein ist.

---

1) Theorie der Besselschen Funktionen p. 59; 1867. Neumann betrachtet den Fall $\nu = 0$.

Mittelst (2) finden wir unmittelbar:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{x - x_1}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{du}{dr} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{r^3}$$

und ähnliche Ausdrücke für die partiellen Ableitungen nach y; demnach erhalten wir aus (1) für das gesuchte Integral die Besselsche Gleichung:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) u = 0,$$

aus der sich für das obenerwähnte spezielle Integral ergibt:

(3) $$u = c_1 J^\nu(r) + c_2 Y^\nu(r),$$

wo c_1 und c_2 willkürliche Konstanten bedeuten.

Der Neumannsche Fall $\nu = 0$ ist später von Poincaré[1]) und Picard[2]) untersucht worden.

Wir denken uns im allgemeinen die vier Koordinaten x, y, x_1 und y_1 reell, somit ergeben die Formeln des § 59 über asymptotische Darstellungen von $J^\nu(x)$ und $Y^\nu(x)$ folgenden Satz:

Die partielle Differentialgleichung (1) *hat als Integral eine Funktion von r allein, und dieses Integral ist in der ganzen reellen Ebene, auch in den sehr entfernten Punkten, immer endlich.*

Um ein zweites Beispiel zu geben, suchen wir mit Poisson[3]) von folgender partiellen Differentialgleichung:

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\nu^2}{x^2} u$$

ein Integral von der Form:

(5) $$u^\nu(x,y) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \cdot \int_0^\pi F(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu} d\varphi, \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

wo $F(x)$ eine willkürliche Funktion bedeutet, für welche jedoch $F^{(1)}(x)$ und $F^{(2)}(x)$ beide existieren müssen.

Wir finden nämlich aus (5) ohne Schwierigkeit:

---

1) Comptes rendus Bd. 117, p. 1027—1032; 1893.

2) Comptes rendus Bd. 118, p. 16—17; 1894.

3) Journal de l'École Polytechnique cahier 19, p. 224; 1823.

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\nu}{x}\cdot u + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\int_0^{\pi} F^{(1)}(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\cos\varphi\,d\varphi;$$

beachten wir, daß eine partielle Integration ohne weiteres die folgende Formel:

$$\int_0^{\pi} F^{(1)}(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{x}{2\nu+1}\cdot\int_0^{\pi} F^{(2)}(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu+2}\,d\varphi$$

liefert, so finden wir aus (6) leicht:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\nu(\nu-1)}{x^2}\cdot u - \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi} F^{(1)}(ay+x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\cos\varphi\,d\varphi + \\[2ex] \qquad + \dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\displaystyle\int_0^{\pi} F^{(2)}(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi; \end{cases}$$

erinnern wir uns nun weiter, daß:

$$(8)\qquad \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\int_0^{\pi} F^{(2)}(ay + x\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi$$

sein muß, so ersehen wir aus (6) und (7), daß (5) wirklich ein Integral von (4) darstellt.

Bedenkt man, daß, wenn $u^{\nu}(x,y)$ ein Integral von (4) ist, dasselbe auch mit den zwei anderen Funktionen:

$$u^{-\nu}(x,y),\qquad \frac{1}{\sin\nu\pi}\left(\cos\nu\pi\cdot u^{\nu}(x,y) - u^{-\nu}(x,y)\right)$$

der Fall sein muß, so gewinnt man für $\nu = 0$, außer $u^0(x,y)$, noch das anderere partikuläre Integral:

$$(9)\qquad v^0(x,y) = \int_0^{\pi} F(ay + x\cos\varphi)\log(x\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$

wie schon Poisson[1]) gezeigt hat; es ist offenbar, daß $v^0(x,y)$ zu $u^0(x,y)$ in demselben Verhältnisse steht wie $Y^0(x)$ zu $J^0(x)$.

1) loc. cit. p. 227.

Wir denken uns nun weiter, daß $F(\varphi)$ im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ durch die Fouriersche Reihe:

$$F(\varphi) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \big(a_s \cos(s\varphi) + b_s \sin(s\varphi)\big)$$

darstellbar sei, wo also:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \cos(n\varphi)\, d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \sin(n\varphi)\, d\varphi$$

sein müssen; die Formeln des § 18 ergeben dann mittelst (5), wenn $-\pi < ay \pm x < +\pi$, für unser partikuläres Integral ohne Mühe folgende eigentümliche Entwicklung:

$$(10)\quad u^\nu(x,y) = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \big(a_s \cos(say) + b_s \sin(say)\big) \frac{J^\nu(sx)}{s^\nu}.$$

Ähnliche Auflösungen gewisser partieller Differentialgleichungen sind in der mathematischen Physik von größter Wichtigkeit; es würde uns indessen hier viel zu weit führen, näher auf diese Untersuchungen einzugehen.

Kapitel IX.

Lineare Differentialgleichungen für das Produkt $C^\nu(x)\, C_1^\varrho(x)$.

§ 54. Herleitung einiger Spezialfälle.

Eine Untersuchung von Poincaré[1]) zeigt, daß das Produkt zweier Cylinderfunktionen mit demselben Argumente im allgemeinen einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung Genüge leisten muß. Die allgemeine Methode von Poincaré ist indessen sehr weitläufig, so daß wir hier vorziehen, eine mehr indirekte Methode anzuwenden.

Um zuerst die Form der obenerwähnten Differentialgleichung zu bestimmen, gehen wir von der in § 21, (1) bewiesenen Formel aus:

$$(1)\qquad J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\, J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^n(2x\cos\varphi) \cos(\nu\varphi)\, d\varphi,$$

1) Acta Mathematica Bd. 8, p. 329 ff.; 1886.

wo n also eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; die Besselsche Gleichung liefert dann für die Funktion:

$$y = J^{\frac{n+\nu}{2}}(x) J^{\frac{n-\nu}{2}}(x)$$

die nicht homogene lineare Gleichung:

$$(2) \quad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} - \frac{n^2}{x^2} y = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^n(2x \cos\varphi) \cos(\nu\varphi) (2 \cos\varphi)^2 \, d\varphi.$$

Führt man nun in dieser Gleichung für die Cylinderfunktion unter dem Integralzeichen die gewöhnliche Reihenentwicklung ein, so ergibt eine gliedweise Integration, mittelst (Γ_{19}), für die Funktion rechter Hand in (2) den Ausdruck:

$$-4 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{n+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+1+\frac{n-\nu}{2}\right)} \cdot \frac{(n+2s+1)(n+2s+2)}{(n+2s+2)^2-\nu^2};$$

wendet man endlich die Identität:

$$\frac{a(a-1)}{a^2-\varrho^2} = 1 + \frac{\varrho-1}{2} \cdot \frac{1}{a-\varrho} - \frac{\varrho+1}{2} \cdot \frac{1}{a+\varrho}$$

an, so läßt sich (2) auch folgendermaßen schreiben:

$$(3) \quad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(4 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 2(\nu+1) u^{-\nu}(x) - 2(\nu-1) u^{\nu}(x),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(4) \quad u^{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{n+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{\Gamma\left(s+1+\frac{n+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+1+\frac{n-\nu}{2}\right)} \cdot \frac{1}{n+2s+2-\nu}$$

gesetzt haben.

Für diese neue Funktion finden wir nun ohne Mühe, daß:

$$(5) \qquad D_x\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} \cdot u^{\nu}(x)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{1-\nu} \cdot J^{\frac{n+\nu}{2}}(x) J^{\frac{n-\nu}{2}}(x)$$

sein muß. Multiplizieren wir also (3) mit $(x:2)^{2-\nu}$, so erhalten wir durch Differentiation nach x mittelst (5) die folgende Gleichung:

$$(6) \quad \begin{cases} y^{(3)} + \frac{3-\nu}{x} y^{(2)} + \left(4 + \frac{1-n^2-\nu^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \left(\frac{4-4\nu}{x} + \frac{n^2\nu}{x^3}\right) y = \\ \qquad = -\frac{4}{x} \nu(\nu+1) u^{-\nu}(x). \end{cases}$$

In dem Spezialfalle $\nu = 0$ ergibt sich also für die Funktion:

$$y = \left(J^{\frac{n}{2}}(x)\right)^2$$

folgende lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(7) \qquad y^{(3)} + \frac{3}{x} y^{(2)} + \left(1 + \frac{1-n^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \frac{4}{x} y = 0,$$

die für $n = 0$ schon von Meissel[1]) gefunden wurde.

Im allgemeineren Falle setzen wir in (5) $-\nu$ für ν und finden so aus (6) die Gleichung vierter Ordnung:

$$(8) \qquad \begin{cases} y^{(4)} + \frac{6}{x} y^{(3)} + \left(4 + \frac{7-n^2-\nu^2}{x^2}\right) y^{(2)} + \left(\frac{16}{x} + \frac{1-n^2-\nu^2}{x^3}\right) y^{(1)} + \\ \qquad + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{n^2\nu^2}{x^4}\right) y = 0, \end{cases}$$

und damit haben wir den vorgelegten Spezialfall vollständig erledigt.

§ 55. Die Differentialgleichung dritter Ordnung für $C^\nu(x) C_1^\nu(x)$.

Die Gleichung § 54, (7) leitet ganz natürlich dazu, daß wir für die Funktionen:

$$\left(J^\nu(x)\right)^2, \qquad J^\nu(x) J^{-\nu}(x)$$

eine Gleichung dritter Ordnung von folgender Form suchen:

$$(1) \qquad y^{(3)} + \frac{a}{x} y^{(2)} + \left(\alpha + \frac{b}{x^2}\right) y^{(1)} + \left(\frac{\beta}{x} + \frac{c}{x^3}\right) y = 0;$$

um die fünf noch unbekannten Koeffizienten zu bestimmen, führen wir in (1) die Reihenentwicklungen für die zwei obenerwähnten Funktionen ein und finden so die Bedingung:

$$(2) \qquad \begin{cases} 4(\omega-1)\left[\omega(\omega-1)(\omega-2) + a\omega(\omega-1) + b\omega + c\right] = \\ \qquad = \omega(\omega^2 - 4\nu^2)\left(\alpha(\omega-2) + \beta\right), \end{cases}$$

wo wir $\omega = 2\nu + 2s$ oder $\omega = 2s$ gesetzt haben.

Die Gleichung (2) muß also für unendlich viele Werte von ω richtig sein, d. h. sie muß eine formelle Identität sein; ordnen wir sie also nach fallenden Potenzen von ω, so müssen die einzelnen Koeffizienten für sich verschwinden. Bemerkt man noch, daß der Ausdruck rechter Hand in (2) für $\omega = \pm 2\nu$, $\omega = 0$ verschwindet, so muß die gesuchte Gleichung offenbar folgendermaßen lauten:

$$(3) \qquad y^{(3)} + \frac{3}{x} y^{(2)} + \left(4 + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \frac{4}{x} y = 0.$$

1) Gewerbeschulprogramm Iserlohn 1862.

Beachtet man ferner, daß (3) ungeändert bleibt, wenn ν sein Zeichen wechselt, so erhellt, daß sich das vollständige Integral dieser Gleichung durch folgende Funktion darstellen läßt:

$$y = c_1 \left(J^\nu(x)\right)^2 + c_2 J^\nu(x)\, Y^\nu(x) + c_3 \left(Y^\nu(x)\right)^2. \tag{4}$$

Durch eine Transformation der unabhängigen Variabeln findet man für die Funktion:

$$z = C^\nu(\beta x^\gamma)\, C_1^\nu(\beta x^\gamma) \tag{5}$$

die Gleichung:

$$z^{(3)} + \frac{3}{x} z^{(2)} + \left(4\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{1-4\nu^2\gamma^2}{x^2}\right) z^{(1)} + 4\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-3} z = 0; \tag{6}$$

setzt man hierin:

$$z = x^{-\alpha} y,$$

so erhält man für die noch allgemeinere Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} & y^{(3)} + \frac{3(1-\alpha)}{x} y^{(2)} + \left(\frac{1-4\nu^2\gamma^2+3\alpha(\alpha-1)}{x^2} + 4\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2}\right) y^{(1)} + \\ & \qquad + \left(\frac{\alpha(4\nu^2\gamma^2-\alpha^2)}{x^3} + 4\beta^2\gamma^2(\gamma-\alpha)x^{2\gamma-3}\right) y = 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

das vollständige Integral:

$$y = x^\alpha\left(c_1\left(J^\nu(\beta x^\gamma)\right)^2 + c_2 J^\nu(\beta x^\gamma)\, Y^\nu(\beta x^\gamma) + c_3\left(Y^\nu(\beta x^\gamma)\right)^2\right). \tag{8}$$

Es ist also offenbar, daß in (7) die Derivierte $y^{(2)}$ wegfallen muß, wenn man $\alpha = 1$ annimmt; setzt man ferner $\beta = \gamma = 1$, so ergibt sich die einfache Gleichung:

$$y^{(3)} + \left(4 + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\right) y^{(1)} + \frac{4\nu^2-1}{x^3} y = 0; \tag{9}$$

die Annahmen $\alpha = 1$, $\nu = \beta = \frac{1}{2\gamma}$ ergeben außerdem die weitere Gleichung:

$$y^{(3)} + x^{2\gamma-2} y^{(1)} + (\gamma-1) x^{2\gamma-3} y = 0 \tag{10}$$

mit dem vollständigen Integrale:

$$\left\{\begin{aligned} y = x\Bigg(& c_1\left(J^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\frac{x^\gamma}{2\gamma}\right)\right)^2 + c_2 J^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\frac{x^\gamma}{2\gamma}\right) Y^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\frac{x^\gamma}{2\gamma}\right) + \\ & \qquad + c_3\left(Y^{\frac{1}{2\gamma}}\left(\frac{x^\gamma}{2\gamma}\right)\right)^2\Bigg). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Von (10) verdienen die Spezialfälle $\gamma = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$ hervorgehoben zu werden.

§ 56. Die Differentialgleichung vierter Ordnung für $C^{\nu}(x)C_1^{\varrho}(x)$.

Von der Gleichung § 54, (8) ausgehend, suchen wir für die Funktion $J^{\nu}(x)J^{\varrho}(x)$ eine Differentialgleichung von der Form:

$$(1)\quad y^{(4)} + \frac{6}{x}y^{(3)} + \left(4 + \frac{a}{x^2}\right)y^{(2)} + \left(\frac{16}{x} + \frac{b}{x^3}\right)y^{(1)} + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{c}{x^4}\right)y = 0;$$

wo die noch unbekannten Koeffizienten a, b, c von x unabhängig sind; um diese Koeffizienten zu bestimmen, führen wir in (1) die obenerwähnte Funktion ein und finden so, daß die Gleichung:

$$(2)\quad \begin{cases} \omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega+3) + a\omega(\omega-1) + b\omega + c = \\ \qquad = \left(\omega^2 - (\nu+\varrho)^2\right)\left(\omega^2 - (\nu-\varrho)^2\right), \end{cases}$$

wo $\omega = \nu + \varrho + 2s$ gesetzt ist, für alle Werte von ω gültig sein muß, so daß sich die drei Koeffizienten leicht bestimmen lassen. Bedenkt man, daß die Größe rechter Hand in (2) für $\omega = \pm\varrho \pm \nu$ verschwinden muß, so findet man demnach die Differentialgleichung:

$$(3)\quad \begin{cases} y^{(4)} + \frac{6}{x}y^{(3)} + \left(4 + \frac{7 - 2\nu^2 - 2\varrho^2}{x^2}\right)y^{(2)} + \\ \qquad + \left(\frac{16}{x} + \frac{1 - 2\nu^2 - 2\varrho^2}{x^3}\right)y^{(1)} + \left(\frac{8}{x^2} + \frac{(\nu^2 - \varrho^2)^2}{x^4}\right)y = 0; \end{cases}$$

da in dieser Gleichung nur die Quadrate der zwei Parameter ν und ϱ vorkommen, so kann man das Zeichen dieser Parameter ganz willkürlich nehmen; also wird das vollständige Integral von (3) gleich:

$$(4)\quad y = c_1 J^{\nu}(x)J^{\varrho}(x) + c_2 J^{\nu}(x)Y^{\varrho}(x) + c_3 Y^{\nu}(x)J^{\varrho}(x) + c_4 Y^{\nu}(x)Y^{\varrho}(x).$$

Hier muß man jedoch voraussetzen, daß ν nicht gleich $\pm\varrho$ sei, denn in diesem Falle sind die vier in (4) eingehenden partikulären Integrale nicht mehr linear unabhängig. Dieser Fall interessiert uns indessen hier nicht weiter, weil wir im vorhergehenden Paragraphen eine Differentialgleichung dritter Ordnung für die zugehörigen Cylinderfunktionen gegeben haben. Das vierte partikuläre Integral von (3) läßt sich übrigens ohne Mühe bilden.

Die gewöhnlichen Transformationen liefern für die Funktion:

$$(5)\quad y = x^{\alpha} C^{\nu}(\beta x^{\gamma})\, C_1^{\varrho}(\beta x^{\gamma})$$

die allgemeinere Differentialgleichung:

$$(6)\quad \begin{cases} y^{(4)} + \frac{6 - 4\alpha}{x}y^{(3)} + \left(4\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{a}{x^2}\right)y^{(2)} + \\ \quad + \left(4b\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-3} + \frac{(2\alpha-1)c}{x^3}\right)y^{(1)} + \left(4d\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-4} + \frac{e}{x^4}\right)y = 0, \end{cases}$$

wo wir der Kürze halber:

$$(7) \quad \begin{cases} a = 6(\alpha-1)^2 - 2\gamma^2(\nu^2+\varrho^2), & b = 2\gamma - 2\alpha + 1, \\ c = 2\gamma^2(\nu^2+\varrho^2) - 2\alpha(\alpha-1) - 1, & d = (\alpha-\gamma)(\alpha-2\gamma), \\ e = (\nu\gamma+\varrho\gamma+\alpha)(\nu\gamma+\varrho\gamma-\alpha)(\nu\gamma-\varrho\gamma+\alpha)(\nu\gamma-\varrho\gamma-\alpha) \end{cases}$$

gesetzt haben.

Es leuchtet also ein, daß für $\alpha = \frac{3}{2}$ die Derivierte $y^{(3)}$ nicht in (6) vorkommen kann.

Wir betrachten noch besonders den Spezialfall $\varrho = \nu + n + 1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; die allgemeine Lommelsche Fundamentalformel § 7, (4) zeigt dann, daß die Funktion:

$$(8) \qquad y = x^{\alpha-1} R^{\nu,n}(\beta x^{\gamma})$$

ein partikuläres Integral der entsprechenden Gleichung (6) sein muß. Damit haben wir für das Lommelsche Polynom diejenige lineare Differentialgleichung vierter Ordnung gefunden, welche Hurwitz[1]) ohne Beweis mitgeteilt hat.

Kapitel X.

Angenäherte Darstellungen einer Cylinderfunktion.

§ 57. Die Hankelschen Integrale.

Wir haben in den vorhergehenden Kapiteln die Fundamentaleigenschaften der Cylinderfunktionen kennen gelernt, indem wir dabei annahmen, daß das Argument stets eine endliche Größe bedeute. Um die Cylinderfunktionen indessen vollständig zu beherrschen, reicht dies nicht aus; wir müssen vielmehr noch ihr Verhalten für sehr große Werte des absoluten Betrages des Argumentes untersuchen, d. h. wir müssen sie in einer asymptotischen Reihe zu entwickeln suchen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir im Anschluß an die älteren Methoden folgendes bestimmte Integral, für welches der Integrationsweg mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfällt:

$$(1) \qquad V = \int_0^{\infty} e^{-tx}(t+y)^{\sigma} t^{\varrho}\, dt;$$

1) Mathematische Annalen, Bd. 33, p. 251 Note; 1889.

dies Integral ist eigentlich der einfachste Spezialfall derjenigen allgemeineren Integrale, die wir in Kapitel XIV noch näher zu untersuchen haben. Indem wir den allgemeinen Methoden folgen, wollen wir hier den Wert von V direkt bestimmen, was ohne Schwierigkeit geschehen kann.

Das Integral (1) konvergiert unbedingt, wenn:

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(\varrho) > -1 \tag{2}$$

ist, und wenn y nicht gleich Null oder einer negativen reellen Größe angenommen wird. Wenn die erste dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, kann das Integral jedenfalls nicht immer unbedingt konvergieren; man findet hier die Bedingungen:

$$\Re(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \Re(\varrho) > -1, \quad \Re(\varrho + \sigma) < 0. \tag{3}$$

In dem ganz speziellen Falle, wo $x = 0$ ist, müssen wir voraussetzen, daß:

$$x = 0, \quad \Re(\varrho) > -1, \quad \Re(\varrho + \sigma) < -1 \tag{4}$$

ist. Wenn y reell und negativ ist, müssen wir zu den vorstehenden Bedingungen noch die weitere hinzufügen:

$$\Re(\sigma) > -1, \tag{5}$$

während $y = 0$ noch die Bedingung:

$$\Re(\varrho + \sigma) > -1, \tag{6}$$

erfordert, so daß der Fall $x = y = 0$ ausgeschlossen bleiben muß.

Wir setzen nun einstweilen x als positiv voraus; die Substitution $tx = r$ ergibt dann:

$$V = x^{-\omega}\mathfrak{B}(xy), \quad \omega = \varrho + \sigma + 1, \tag{7}$$

wo demnach:

$$\mathfrak{B}(xy) = \int_0^\infty e^{-tx}(tx)^{\omega} t^{\varrho - \omega}(t + y)^{\sigma}\, dt \tag{8}$$

gesetzt wird und eine Funktion des Produktes xy bedeutet. Die Gleichung (7) ist indessen nur bewiesen, wenn x eine positive Größe bedeutet; einem bekannten Satze[1]) zufolge ist sie aber überall da anwendbar, wo das Integral V eine in x analytische Funktion darstellt. Von einem einfachen Faktor abgesehen, ist V also eine Funktion des Argumentes xy; die Form (1) dieses Integrales scheint also unnötig kompliziert zu sein, denn theoretisch ist es ja nicht

1) Neumann: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. Leipzig 1884, p. 35.

allgemeiner als dasjenige von derselben Form, wo $y = 1$ angenommen wird. Wir bemerken hierzu nur, daß diese neue Variable y sowohl bei der Herleitung des Wertes des Integrales als für seine Anwendungen eine wichtige Rolle spielt.

Um nun den Wert des Integrales $\mathfrak{B}$ zu bestimmen, benutzen wir zunächst die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial(e^{-tx}(tx)^{\omega})}{\partial x} + \left(t - \frac{\omega}{x}\right)e^{-tx}(tx)^{\omega} = 0$$

und differentiieren in (8) unter dem Integralzeichen nach x, was unter der Bedingung (2) offenbar erlaubt ist; die Identität $t = (t + y) - y$ ergibt dann für $\mathfrak{B}$ die Gleichung:

$$(9) \quad y\mathfrak{B}^{(1)}(xy) - \left(\frac{\omega}{x} + y\right)\mathfrak{B}(xy) = -\int_0^{\infty} e^{-tx}(tx)^{\omega} t^{\varrho - \omega}(t + y)^{\sigma + 1} dt,$$

wo wir der Kürze halber:

$$\mathfrak{B}^{(n)}(xy) = \frac{d^n \mathfrak{B}(xy)}{d(xy)^n}$$

gesetzt haben. Differentiieren wir nun die Gleichung (9) abermals nach y, so finden wir, nach einer Division durch xy, für $\mathfrak{B}(x)$ folgende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(10) \qquad \mathfrak{B}^{(2)}(x) + \left(\frac{1 - \omega}{x} - 1\right)\mathfrak{B}^{(1)}(x) + \frac{\sigma}{x}\,\mathfrak{B}(x) = 0,$$

welche wir mit der in § 49, (5) für $x^{\alpha}e^{-i\beta x^{\gamma}}C^{\nu}(\beta x^{\gamma})$ gefundenen Differentialgleichung zu vergleichen haben.

Nun ist es klar, daß diese beiden Gleichungen dann und nur dann identisch sein können, wenn:

$$\alpha = \nu, \quad \beta = \frac{i}{2}, \quad 2\alpha = \omega = \varrho + \sigma + 1, \quad \alpha - \frac{1}{2} = \sigma, \quad \gamma = 1$$

also wenn

$$\alpha = \nu, \quad \varrho = \sigma = \nu - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{i}{2}, \quad \omega = 2\nu, \quad \gamma = 1$$

angenommen wird, so daß man für das entsprechende Integral folgenden Ausdruck:

$$(11) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} t^{\nu - \frac{1}{2}} (t+y)^{\nu - \frac{1}{2}} dt = \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} e^{\frac{xy}{2}} \left(c_1 J^{\nu}\left(\frac{xyi}{2}\right) + c_2 Y^{\nu}\left(\frac{xyi}{2}\right)\right)$$

findet; außerdem haben wir gesehen, daß das Integral linker Hand in (11) das einzige von der Form (1) ist, welches sich direkt durch Cylinderfunktionen ausdrücken läßt.

Der Faktor y^ν rechter Hand in (11) ist eingeführt worden, weil ja das Integral linker Hand, mit $x^{2\nu}$ multipliziert, eine Funktion des Argumentes xy darstellen soll, so daß nun die beiden noch unbekannten Koeffizienten c_1 und c_2 sowohl von x als von y unabhängig sein müssen und also nur Funktionen von ν allein sein können; diese Funktionen müssen aber überall dieselben sein, wo das Integral linker Hand überhaupt einen Sinn hat.

Um nun die Koeffizienten c_1 und c_2 zu bestimmen, greifen wir zunächst auf die Bedingung (4) zurück; das Integral linker Hand in (11) läßt sich dann mittelst (Γ_{17}) berechnen, während die von $Y^\nu(x)$ herrührende Funktion $J^{-\nu}(x)$ rechter Hand verschwindet; also finden wir folgende erste Gleichung:

$$(12) \qquad c_1 \sin \nu\pi + c_2 \cos \nu\pi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\nu\pi i}{2}},$$

die somit überall gültig bleibt, wo das Integral einen Sinn hat. Zweitens ziehen wir die Bedingung (6) in Betracht, setzen also $y = 0$; das Integral läßt sich dann mittelst (Γ_{14}) bestimmen, während die Funktion $J^\nu(x)$ rechter Hand verschwindet, so daß wir die zweite Gleichung:

$$(13) \qquad c_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{\nu\pi i}{2}}$$

erhalten, die ebenfalls überall gültig bleibt, wo das Integral einen Sinn hat. Somit finden wir endlich die Formel:

$$(14) \quad \int_0^\infty e^{-tx}(t+y)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{\frac{xy}{2} + \frac{\nu+1}{2}\pi i} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \cdot H_1^\nu\left(\frac{xyi}{2}\right).$$

Setzen wir ferner in (14) $-y = ye^{\pi i}$ für y, so ergibt sich mittelst § 5, (6) folgende ganz analoge Formel:

$$(15) \quad \int_0^\infty e^{-tx}(t-y)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{xy}{2} + \frac{\nu-1}{2}\pi i} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \cdot H_2^\nu\left(\frac{xyi}{2}\right),$$

die mithin unter denselben Bedingungen gültig ist wie (14).

Sind x und y beide positiv und ν reell, so werden die beiden Ausdrücke in (14) wegen § 4, (5) reell, während das Integral (15) reell wird für y negativ.

Hankel[1]) hat die Formeln (14), (15) für $y = -2i$ gefunden; später hat Dini[2]) dieselben Formeln durch eine Änderung des Integrationsweges aus dem zweiten Besselschen Integrale hergeleitet.

1) Mathematische Annalen Bd. 1, p. 491; 1869.

2) Serie di Fourier, p. 234; Pisa 1880.

§ 58. Asymptotische Reihen für $H_1^\nu(x)$ und $H_2^\nu(x)$.

Wir setzen:

$$x = re^{\theta i}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}; \quad y = 2e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = -2ie^{\theta i}$$

und führen in § 57, (14), (15) r für x ein; wir erhalten dann die zwei Formeln:

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-tr}\left(1 + \frac{ti}{2}e^{-\theta i}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{r^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot e^{-i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \cdot H_1^\nu(x),$$

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-tr}\left(1 - \frac{ti}{2}e^{-\theta i}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{r^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot e^{i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \cdot H_2^\nu(x).$$

Weiter setzen wir:

$$\left(1 + \frac{ti}{2}e^{-\theta i}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = \Re(t) + i\Im(t),$$

wo $\Re(t)$ und $\Im(t)$ reelle Funktionen der reellen Variabeln t bedeuten, und finden so die folgende Taylorsche Reihenentwicklung:

$$(3) \qquad \Re(t) + i\Im(t) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\nu-\frac{1}{2}}{s}\left(\frac{ti}{2}\right)^s e^{-s\theta i} + R_n(t),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(4) \qquad R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\Re^{(n+1)}(\varepsilon t) + i\Im^{(n+1)}(\varepsilon' t)\right)$$

gesetzt haben, während ε und ε' zwei Größen zwischen 0 und 1 bedeuten.

Wir führen nun in (1) die Reihenentwicklung (3) ein und erhalten, wenn $f(x)$ das Integral linker Hand bedeutet, somit:

$$(5) \qquad f(x) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{r^{\nu+\frac{1}{2}}}\left(P_n(x) + iQ_n(x)\right) + \int_0^\infty e^{-tr}t^{\nu-\frac{1}{2}}R_n(t)\,dt,$$

wo wir folgende Abkürzungen eingeführt haben:

$$(6) \qquad P_n(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \cdot \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s}},$$

$$(7) \qquad Q_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \cdot \frac{\left(\nu^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2 - \frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s+1}}.$$

Es ist sonach offenbar, daß die Reihen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ im allgemeinen für $n = \infty$ divergent sein müssen; nur in dem Spezialfalle, in welchem ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl bedeutet, brechen diese Reihen von selbst ab, und wir finden dann genau die in § 11 für die Poissonschen Cylinderfunktionen gegebenen Ausdrücke.

Soll nun aber die Formel (5) wirklich die asymptotische Reihe für $f(x)$ liefern, so muß es nach der Definition von Poincaré[1] möglich sein, einen hinlänglich großen Wert X von $|x|$ zu bestimmen, so daß, wenn $|x| \geqq X$ vorausgesetzt wird,

$$(8) \qquad |x^n R_n'| = \left| x^n \int\limits_0^\infty e^{-xt} t^{\nu - \frac{1}{2}} R_n(t)\, dt \right| < \sigma$$

ist, wo σ eine vorgegebene positive Größe von beliebiger Kleinheit bedeutet. Nun findet man leicht, daß:

$$(9) \quad \begin{cases} |R_n| < K \cdot \displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-tr} \left(|\Re^{(n-1)}(\varepsilon t)| + |\Im^{(n-1)}(\varepsilon' t)| \right) t^{\nu' + n - \frac{1}{2}}\, dt, \\ |R_n'| < \dfrac{K}{r^{\nu' + n + \frac{1}{2}}} \cdot \displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-t} \left(\left|\Re^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon t}{r}\right)\right| + \left|\Im^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon' t}{r}\right)\right| \right) t^{\nu' + n - \frac{1}{2}}\, dt \end{cases}$$

sein muß, wo K eine endliche Größe bedeutet, und wo wir der Kürze halber $\Re(\nu) = \nu'$ gesetzt haben; die letzte Ungleichheit (9) ergibt aber unmittelbar (8).

Die Formel (2) läßt sich auf dieselbe Weise behandeln; somit haben wir bewiesen, daß die Entwicklung (5) und die zu ihr analoge aus (2) erhaltene wirklich die asymptotischen Reihen für die zwei in (1) und (2) auftretenden Integrale liefern, wenn nur:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$$

vorausgesetzt wird; demnach finden wir:

$$(10) \qquad e^{-i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \cdot H_1^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(P_n(x) + i\, Q_n(x) \right),$$

$$(11) \qquad e^{i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \cdot H_2^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(P_n(x) - i\, Q_n(x) \right),$$

wo das Zeichen $\sim$ eine asymptotische Gleichheit im Sinne Poincarés bezeichnet.

---

1) Acta Mathematica Bd. 8. p. 297; 1886.

Setzt man weiter in (1) $\theta = \frac{\pi}{2}$, so ist einleuchtend, daß die Formel (10) auch in diesem Falle noch ihre Gültigkeit behält, während (2) direkt keine asymptotische Darstellung mehr liefern kann. Setzt man indessen in § 57, (15) $xe^{\varphi i}$ für x und $y = 2e^{-\varphi i}$, wo $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt wird, so findet man, nach einer Division durch $y^{\nu-\frac{1}{2}}$, die Formel:

$$\int_0^\infty e^{-xte^{\varphi i}}\left(1-\frac{t}{2}e^{\varphi i}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi x i}{2}}\,\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(xe^{\varphi i})^{\nu+\frac{1}{2}}}\,e^{i\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} H_2^\nu(xi),$$

und das so erhaltene Integral läßt sich ohne Mühe nach der oben gegebenen Methode entwickeln, so daß die Formel (11) auch hier gültig bleibt.

In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir immer $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ voraussetzen müssen; wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann man das Zeichen von ν unter Anwendung der Formeln § 4, (2) wechseln, so daß die asymptotischen Gleichheiten (10), (11) auch in diesem Falle gültig bleiben.

Wir haben so den allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn ν eine willkürliche endliche Größe bedeutet, und $x = re^{i\theta}$ ist, wo $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqq +\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt wird, so sind die beiden asymptotischen Reihen (10) *und* (11) *in der ganzen so bestimmten Halbebene anwendbar.*

Dieser Satz ist in der Tat höchst merkwürdig und zum Beispiel in der Theorie der Fakultätenreihen von großem Interesse.

Wenn der Winkel θ der oben gestellten Bedingung nicht genügt, so kann man die Formeln § 5, (6), (7) anwenden und findet dann die höchst wichtige Folgerung des obenerwähnten Satzes:

Wenn ν eine willkürliche endliche Größe bedeutet, so sind die Grenzwerte:

$$(12)\qquad \lim_{|x|=\infty}\left(\sqrt{x}\,e^{-ix}H_1^\nu(x)\right),\quad \lim_{|x|=\infty}\left(\sqrt{x}\,e^{ix}H_2^\nu(x)\right)$$

stets zugleich endlich und von Null verschieden.

Eben diese Grenzwerte sind es, welche die große Anwendbarkeit der Hankelschen Cylinderfunktionen im Gebiete der bestimmten Integrale bedingen.

Die Formeln (10), (11) sind zuerst von Hankel[1]) aufgestellt

1) Mathematische Annalen Bd 1, p. 494; 1869.

worden; wie Hurwitz[1]) bemerkt hat, beurteilt er indessen die Tragweite seiner Resultate falsch. Später hat H. Weber[2]) die Formel (11) entwickelt, während Dini[3]) wieder beide Formeln gab.

§ 59. Asymptotische Entwicklungen für $J^\nu(x)$ und $Y^\nu(x)$.

Multipliziert man in § 56, (10), (11) mit den Exponentialfunktionen, so erhält man nach einer Addition und Subtraktion der beiden so gewonnenen Formeln folgende asymptotische Darstellungen:

$$(1)\quad J^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) P_n(x) - \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) Q_n(x)\right),$$

$$(2)\quad Y^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) P_n(x) + \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) Q_n(x)\right),$$

wo x als positiv anzunehmen ist. Ist dies nicht der Fall, oder bleibt wenigstens die imaginäre Komponente von x nicht endlich, so können die Formeln (1) und (2) die beiden Cylinderfunktionen nicht im Sinne Poincarés asymptotisch darstellen.

Doch sind auch in diesem Falle die beiden Formeln (1) und (2) noch sehr nützlich, da sie uns immer über das Verhalten der Funktionen J und Y für große Werte von $|x|$ Auskunft geben. Betrachten wir zum Beispiel den Fall, in welchem das Argument in der Form xi gegeben ist, wo x eine positive Größe bedeutet, so finden wir aus (1), (2) folgende asymptotische Darstellungen:

$$(3)\quad e^{-x} J^\nu(xi) \sim \frac{P_n(xi) + iQ_n(xi)}{\sqrt{2\pi x}} e^{-2x - \frac{\nu+1}{2}\pi i} + \frac{P_n(xi) - iQ_n(xi)}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{\nu\pi i}{2}},$$

$$(4)\quad e^{-x} Y^\nu(xi) \sim -\frac{P_n(xi) + iQ_n(xi)}{\sqrt{2\pi x}} e^{-2x - \frac{\nu\pi i}{2}} + \frac{P_n(xi) - iQ_n(xi)}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i},$$

Formeln, die uns späterhin sehr nützlich sein werden.

Sicher hat Poisson[4]) zum ersten Male die Formel (1) für $\nu = 0$ gegeben, während Hansen[5]) dieselbe Formel für $\nu = 1$ angibt und Jacobi[6]) unsere Formel für einen willkürlichen ganzen

---

1) Mathematische Annalen Bd. 33, p. 246; 1889. 2) Ebenda Bd. 6, p. 148; 1873.

3) Serie di Fourier p. 234, Pisa 1880.

4) Journal de l'École Polytechnique, cahier 19, p. 350; 1823.

5) Mémoire sur la détermination des perturbations absolues p. 113—117; Paris 1845. (Deutsch erschienen 1843.)

6) Astronomische Nachrichten Bd. 25, col. 94; 1849.

Wert von ν ohne Beweis mitteilt. Der erste Beweis für diese allgemeinere Formel scheint von Plana[1]) gegeben oder wenigstens klar angedeutet zu sein; Anger[2]) behandelt ausführlicher die Entwicklungen von Jacobi. Schlömilch[3]) und Lipschitz[4]) geben wie Hansen unsere Formel für $\nu = 0$ und $\nu = 1$, während sie zugleich darauf hinweisen, wie es möglich sei, dieselbe Formel für ganze Werte von ν zu finden.

Lommel[5]) gibt ohne Beweis die beiden allgemeinen Formeln (1) und (2) an; in den letzten Jahren hat Weber[6]) eine neue Herleitung der beiden Formeln (1) und (2) für ganze ν geliefert, während Stiltjes[7]) dieselben Formeln sehr eingehend für $\nu = 0$ untersucht hat.

In den Paragraphen 2 und 3 haben wir asymptotische Ausdrücke für die Cylinderfunktionen erster und zweiter Art unter der Voraussetzung gegeben, daß $|x|$ endlich bleibt und $|\nu|$ sehr groß ist; hier haben wir also den umgekehrten Fall auseinandergesetzt. Es wäre sehr wünschenswert, auch den Fall bemeistern zu können, in welchem sowohl $|x|$ als $|\nu|$ sehr groß, doch aber so angenommen werden, daß ihr Verhältnis endlich bleibt. Dieser Fall scheint indessen große Schwierigkeiten zu bieten. Vollständig kennt man bisher, wenn ich nicht irre, nur den einfachsten Fall, in welchem x und ν beide als positiv angenommen werden[8]). Der von Cauchy[9]) gegebene Ausdruck ist in der Tat gar nicht asymptotisch, sondern nur als ein sehr ungenauer Majorantwert anzusehen; wir werden später (§ 122) die Formel von Cauchy verallgemeinern.

§ 60. Numerische Tafeln für Cylinderfunktionen.

Obgleich die numerische Berechnung der Cylinderfunktionen noch andere Methoden in Anspruch nimmt als diejenige, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen entwickelt haben, scheint es

---

1) Memorie dell' Accademia di Torino serie 2ª Bd. 10, p. 283; 1849.

2) Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft Danzig Bd. 5, p. 18; 1855.

3) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 2, p. 147—153; 1857.

4) Journal für Mathematik Bd. 56, p. 193—196; 1859.

5) Studien über die Besselschen Funktionen p. 57—65; 1868.

6) Mathematische Annalen Bd. 37; 1890.

7) Annales de l'École Normale (3) Bd. 3, p. 233 ff.; 1886.

8) Graf und Gubler: Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen Heft I, p. 96.

9) Comptes rendus Bd. 13, p. 687, p. 854; 1841.

uns doch angemessen, hier eine Übersicht über die wichtigsten Tafeln für diese Funktionen mitzuteilen. Der Kürze halber bezeichnen wir das Intervall der Tafel mit d, während die Zahl p der Decimalstellen, welche die betreffende Tafel mitteilt, einfach mit p Dec. bezeichnet werden soll.

1) *Die Tafel von Bessel*[1]) gibt die Werte von $J^0(x)$ und $J^1(x)$ von $x = 0{,}00$ bis $x = 3{,}10$ mit 10 Dec. und für $d = 0{,}01$.

2) *Die Tafel von Airy*[2]) gibt die Werte von $J^1(x)$ von $x = 0{,}0$ bis 10,0 mit 4 Dec. und für $d = 0{,}2$; von dieser kleinen Tafel hat Knochenhauer[3]) in seinen optischen Untersuchungen Gebrauch gemacht.

3) *Die Tafeln von Hansen*[4]): die erste gibt die Werte von $J^0(x)$ und $J^1(x)$ von $x = 0$ bis $x = 10{,}0$ mit 6 Dec. und für $d = 0{,}1$; die zweite bietet mit 7 Dec. eine Reihe von Werten von $J^n(x)$, wo n und x einander ziemlich gleich sind. Diese Tafel ist offenbar mit Rücksicht auf die Besselsche Auflösung der Keplerschen Gleichung berechnet worden.

Es ist indessen daran zu erinnern, daß Hansen immer $J^n(2x)$ in Betracht zieht; Schlömilch[5]) druckt die Hansenschen Tafeln ungeändert ab, während Lommel[6]) sie mit dem gewöhnlichen Argumente angibt.

4) *Die Tafel von Meissel*[7]) liefert die Werte von $J^0(x)$ und $J^1(x)$ von $x = 0{,}00$ bis $x = 15{,}50$ für $d = 0{,}01$ und mit 12 Dec.

5) *Die Tafel im Report of the meeting of the British Association for the advancement of science 1889* gibt die Werte von $J^n(x)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 11$ von $x = 0{,}0$ bis $x = 0{,}6$ für $d = 0{,}2$ und durchgehends mit 12 Dec.

6) *Die Tafel im Report of the British Association 1893* liefert für $d = 0{,}001$ und mit 9 Dec. die Werte von $J^1(x)$ von $x = 0{,}000$ bis $x = 6{,}000$ und für $d = 0{,}2$ die Werte von $J^0(i\sqrt{x})$ für $x = 0{,}0$ bis $x = 6{,}0$.

7) *Die Tafel im Report of the British Association 1896* gibt die Werte $J^0(x)$ von $x = 0{,}000$ bis $x = 5{,}1000$ für $d = 0{,}0001$ und mit 9 Dec.

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 46—52.

2) Poggendorffs Annalen Bd. 45, p. 95; 1838.

3) Undulationstheorie des Lichts. Berlin 1839.

4) Mémoire sur la détermination des perturbations absolues. Paris 1845 (1843).

5) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 2, p. 158—165; 1857.

6) Studien über die Besselschen Funktionen, 1868.

7) Abhandlungen der Berliner Akademie 1888.

Die vier letzten Tafeln sind in dem Buche von Gray und Matthews[5]) abgedruckt. Weit spärlicher scheint die Berechnung von Tafeln für die Neumannsche Cylinderfunktion erfolgt zu sein; für sie ist mir in der Tat nur eine einzige Tafel bekannt:

8) *Die Tafel von Smith*[6]), welche die Werte von $Y^0(x)$ und $Y^1(x)$ von $x = 1{,}00$ bis $x = 10{,}20$ für $d = 0{,}01$ und mit 4 Dec. angibt.

Für die Cylinderfunktion der ersten Art mit nicht ganzem Parameter kennt man nur eine Tafel von Lommel[7]), welche für ganze Argumente die Werte der Poissonschen Cylinderfunktion mit dem Parameter $n + \frac{1}{2}$, n ganz, bietet.

Kapitel XI.

Nullstellen. Untersuchungen von Hurwitz.

§ 61. Allgemeine Sätze über die Nullstellen einer Cylinderfunktion.

Die Eigenschaften der Cylinderfunktionen, welche wir in den vorhergehenden Kapiteln ermittelt haben, erlauben uns, unmittelbar eine Reihe von Sätzen über die Nullstellen solcher Funktionen herzuleiten. Wir wollen deshalb hier an der Spitze unserer Theorie der Nullstellen die wichtigsten dieser Sätze vorausschicken, obgleich wir die Existenz dieser Nullstellen noch nicht allgemein bewiesen haben.

Die asymptotischen Entwicklungen, welche wir in dem vorigen Kapitel gegeben haben, zeigen ohne weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes:

I. *Wenn ν endlich ist, so haben die Funktionen $J^\nu(x)$ und $Y^\nu(x)$ unendlich viele Nullstellen, die sich, je größer und größer ihre absoluten Beträge werden, mehr und mehr den Ausdrücken*

$$(1) \qquad \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{2\nu + 1}{4}\pi, \quad k\pi + \frac{2\nu + 1}{4}\pi$$

nähern, wo k eine ganze Zahl von überaus großem absolutem Betrage bedeutet.

---

1) Bessel functions, London 1895.

2) Messenger (2) Bd. 26, p. 98—101; 1896.

3) Abhandlungen der Münchener Akademie Bd. 15, p. 644—647; 1886.

Bemerkt man nämlich, daß die imaginären Komponenten der Zahlen (1) stets endlich bleiben, so sind die Reihen § 59, (1), (2) offenbar wirklich asymptotische Reihen im Sinne Poincarés; der Satz ist somit einleuchtend. Wir wissen aber nicht, ob diese Cylinderfunktion außer den Zahlen (1) nicht noch sehr ferne Nullstellen besitzen.

Die Hankelschen Cylinderfunktionen scheinen in Bezug auf ihre Nullstellen recht eigentümliche Verhältnisse zu haben; so ergeben zum Beispiel die Formeln (12) des § 11 unschwer:

II. *Wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet, so haben die beiden Funktionen $H_1^{n+\frac{1}{2}}(x)$ und $H_2^{n+\frac{1}{2}}(x)$ im endlichen Gebiete der x-Ebene genau n Nullstellen, verschwinden aber sonst nur mit $e^{\pm ix}$.*

Wenden wir uns nunmehr zu den Fundamentalformeln für Cylinderfunktionen, so finden wir weiterhin:

III. *Die Cylinderfunktion $C^\nu(x)$ kann außer Null keine mehrfache Nullstelle haben.*

Denn eine mehrfache Nullstelle von $C^\nu(x)$ müßte zufolge Formel (1) in § 4 zugleich eine Nullstelle von $C^{\nu+1}(x)$ sein; dies ist aber unangängig, wie deutlich aus der Lommelschen Fundamentalformel § 7, (5) hervorgeht. Diese letztere Formel ergibt außerdem noch:

IV. *Zwei verschiedene Cylinderfunktionen mit demselben Parameter $C^\nu(x)$ und $C_1^\nu(x)$ können keine gemeinsame Nullstelle haben.*

Die zweite Fundamentalformel für Cylinderfunktionen zeigt ferner:

V. *Wenn α eine von Null verschiedene Nullstelle von $C^\nu(x)$ bedeutet, ist immer*

$$C^{\nu-1}(\alpha) = -C^{\nu+1}(\alpha). \tag{2}$$

Die allgemeine Formel § 11, (1) liefert noch folgenden Satz:

VI. *Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so können die Cylinderfunktionen $C^\nu(x)$ und $C^{\nu+n}(x)$ außer Null jedenfalls keine andere Nullstelle gemeinsam haben als die Wurzeln der algebraischen Gleichung:*

$$R^{\nu,n-1}(x) = 0. \tag{3}$$

Wahrscheinlich haben diese Cylinderfunktionen außer Null überhaupt keine gemeinsamen Nullstellen. Bourget[1]) behauptet bewiesen zu haben, daß $J^n(x)$ und $J^{n+p}(x)$, wo n und p ganze Zahlen sind, außer Null keine gemeinsamen Nullstellen haben können; indessen hat er nur so viel bewiesen, daß diese Funktionen außer Null keine mehrfachen Nullstellen haben können.

1) Annales de l'École Normale Bd. 3, 1866.

Die Integralformeln § 28, (6), (7) führen weiterhin zu folgendem Satze:

VII. *Wenn* $\Re(\nu) > -1$ *vorausgesetzt wird und* α *und* β *von Null verschiedene Nullstellen von* $J^\nu(x)$ *bedeuten, so ist:*

$$(4) \qquad \int_0^1 x J^\nu(\alpha x) J^\nu(\beta x) dx = \begin{cases} 0, & \alpha^2 \neq \beta^2 \\ \frac{1}{2}(J^{\nu+1}(\alpha))^2, & \alpha^2 = \beta^2 \end{cases}.$$

Setzt man in (4) $\nu = \pm \frac{1}{2}$, so findet man als Spezialfall die bekannten Formeln für die trigonometrischen Funktionen.

Über die Realität der Nullstellen von $\left(\frac{2}{x}\right)^\nu J^\nu(x)$ erhalten wir aus (4) noch den Satz:

VIII. *Wenn* ν *reell und größer als* -1 *vorausgesetzt wird, so hat die Funktion* $J^\nu(x)$ *nur lauter reelle Nullstellen.*

Erstens ist es offenbar, daß $J^\nu(x)$ keine rein imaginären Nullstellen besitzen kann, denn $\left(\frac{2}{xi}\right)^\nu J^\nu(xi)$ muß ja für reelle x immer positiv sein. Wäre nun weiter $p + qi$ eine komplexe Nullstelle derselben Funktion, so müßte sie nach einem bekannten Satze von Schwarz[1]) auch die konjugierte Nullstelle $p - qi$ haben. Nun sind aber nach demselben Satze $J^\nu\big(x(p+qi)\big)$ und $J^\nu\big(x(p-qi)\big)$, wo x als positiv anzusehen ist, wieder konjugierte komplexe Größen, ihr Produkt also immer positiv, und somit kann das Integral linker Hand in (4) nicht verschwinden.

Schon Euler[2]) hat bemerkt, daß $J^0(x)$ lauter reelle Nullstellen haben muß; neuerdings hat Bôcher[3]) einen elementaren Beweis desselben Satzes gegeben. Stern[4]) hat den obenerwähnten Satz für ganze Werte von ν bewiesen, während zuerst Schläfli[5]) den allgemeinen Satz mittelst des oben gegebenen Beweises hergeleitet hat; dieses Beweisverfahren ist übrigens nach einer Bemerkung von Sturm[6]) Poisson[7]) zuzuschreiben.

Obgleich wir hier noch gar nicht allgemein bewiesen haben, daß es wirklich solche reelle Nullstellen von $J^\nu(x)$ gibt, wollen wir

1) Mathematische Abhandlungen Bd. 2, p. 66 ff.

2) Acta Academiae Petropolitanae 1781, p. 174 ff.

3) Bulletin of the American Math. Soc. (2) Bd. 5, p. 385—388; 1899.

4) Journal für Mathematik Bd. 22; 1841.

5) Mathematische Annalen Bd. 10, p. 137; 1876.

6) Journal de Mathématiques Bd. 1, p. 384; 1836.

7) Bulletin de la Société philomatique 1828. Théorie mathématique de la chaleur p. 178. Paris 1835.

doch, indem wir den Satz für den Augenblick als bewiesen voraussetzen, um den Zusammenhang nicht zu unterbrechen, hier noch folgenden Satz mitteilen:

IX. *Wenn ν reell ist, so verteilen sich die reellen Nullstellen α von $J^{\nu}(x)$ und β von $J^{\nu+1}(x)$ gegenseitig so, daß zwischen je zwei aufeinanderfolgenden α immer ein und nur ein β und umgekehrt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden β immer ein und nur ein α liegt.*

Dieser Satz ist eine einfache Folge der zwei Differentialformeln (4) und (5) des § 10; denn eine Anwendung von (5) zeigt dem Rolleschen Satze zufolge, daß mindestens ein β zwischen je zwei aufeinanderfolgenden α liegen muß, während (4) unmittelbar ergibt, daß auch zwischen je zwei aufeinanderfolgenden β mindestens ein α liegen muß. Dieser Satz ist neuerdings auf ganz andere Weise von Gegenbauer[1]), van Vleck[2]), Hobson[3]), Porter[4]) und Bôcher[5]) bewiesen worden.

Wir bemerken, daß die Nullstellen von $C^{\nu}(x)$ offenbar eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion des Parameters ν sein müssen; differentiieren wir aber nun die Identität:

$$C^{\nu}(\omega) = 0,$$

wo ω die obenerwähnte Funktion bedeutet, so finden wir folgenden Satz:

X. *Die Nullstellen der Cylinderfunktion $C^{\nu}(x)$ sind als die verschiedenen Zweige einer unendlich vieldeutigen Funktion $\omega(\nu)$ des Parameters ν anzusehen; für diese Funktion finden wir folgende Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$C^{\nu+1}(\omega)\frac{d\omega}{d\nu} = \mathfrak{C}^{\nu}(\omega) \cdot \tag{5}$$

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns nunmehr zu den schönen Untersuchungen von Hurwitz[6]), indem wir seine Darstellung möglichst genau, hier und da fast wortgetreu folgen.

---

1) Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 8, p. 383—384; 1897.
2) American Journal of Mathematics Bd. 19; 1897.
3) Proceedings of the Math. Soc. London, Bd. 28; 1897.
4) American Journal of Mathematics Bd. 20; 1898.
5) Bulletin of the American Math. Soc. (2) Bd. 5, p. 205—213; 1897.
6) Mathematische Annalen Bd. 33; 1889.

§ 62. $J^\nu(x)$ als gleichmäßige Grenze der Lommelschen Polynome.

Für die Untersuchungen über die Nullstellen der Besselschen Cylinderfunktion ist die gewöhnliche Reihenentwicklung für $J^\nu(x)$ nicht recht bequem; wir setzen daher:

$$(1) \qquad f_\nu(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^s}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}, \quad J^\nu(2i\sqrt{x}) = (i\sqrt{x})^\nu f_\nu(x),$$

so daß sich die Reduktionsformel § 11, (7) in folgender Form darbietet:

$$(2) \qquad f_{\nu-1}(x) = g_n(x) f_{\nu+n-1}(x) + x g_{n-1}(x) f_{\nu+n}(x),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(3) \qquad \begin{cases} g_n(x) = (-1)^n (i\sqrt{x})^n R^{-\nu-n,n}(2i\sqrt{x}), \\ g_n(x) = \sum\limits_{s=0}^{\leq \frac{n+1}{2}} \frac{(n-s)!}{s!} \binom{\nu+n-s-1}{n-2s} x^s \end{cases}$$

gesetzt haben.

Nun läßt sich die Lommelsche Fundamentalformel § 7, (3) auch folgendermaßen schreiben:

$$J^{\nu-1}(x) J^{-\nu-n}(x) + (-1)^n J^{-\nu+1}(x) J^{\nu+n}(x) = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} R^{-\nu-n,n}(x),$$

also findet man aus (2), (3):

$$(4) \qquad g_n(x) = \frac{(-1)^n \pi}{\sin\nu\pi}\Big(f_{\nu-1}(x) f_{-\nu-n}(x) - x^{n+1} f_{-\nu+1}(x) f_{\nu+n}(x)\Big)$$

Führt man weiter in (4) für $f_{-\nu-n}(x)$ und $f_{\nu+n}(x)$ die aus (1) erhaltenen Reihenentwicklungen ein, so erhält man mit Zuhilfenahme der Formel (Γ_3):

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{g_n(x)}{\Gamma(\nu+n)} = f_{\nu-1}(x)\left(1 + \dfrac{x}{-\nu-n+1} + \cdots\right) - \\ \qquad - \dfrac{(-1)^n \pi x^{n+1} f_{-\nu+1}(x)}{\sin\nu\pi\,\Gamma(\nu+n)\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(1 + \dfrac{x}{\nu+n+1} + \cdots\right). \end{cases}$$

Wir schließen der Einfachheit halber den Fall eines ganzzahligen ν aus; denn, wenn ν ganz ist, kann, wie Satz VIII des vorigen Paragraphen zeigt, $J^\nu(x)$ nur lauter reelle Nullstellen haben; unter dieser Voraussetzung ergibt (5) unmittelbar den Satz:

Ist G ein beliebig großes, aber endliches Gebiet der x-Ebene, so kann man N so groß annehmen, daß sich, für jede Stelle des Gebietes G, $g_n(x) : \Gamma(\nu+n)$ um weniger als eine beliebig vorgegebene Größe

von $f_{\nu-1}(x)$ *unterscheidet, sobald* $n \geq N$ *angenommen wird; also ist* $f_{\nu-1}(x)$ *in* G *die gleichmäßige Grenze von* $g_n(x) : \Gamma(\nu + n)$.

Nach diesen Überlegungen beweisen wir nunmehr den allgemeinen Satz:

Im Innern und auf dem Rande R eines einfach zusammenhängenden Bereiches G seien die Funktionen $f(x)$ *und* $g(x)$ *eindeutig und stetig. In jedem Punkte des Randes R mögen ferner* $f(x)$ *und* $g(x)$ *von Null verschieden, sowie*

$$| f(x) - g(x) | < | f(x) |$$

sein; dann verschwindet die Funktion $f(x)$ *im Innern des Bereiches B genau so oft wie die Funktion* $g(x)$.

Setzt man nämlich:

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot u, \quad g(x) = (1 - u) f(x),$$

so findet man:

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R d\log g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R d\log f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R d\log(1-u),$$

wo die Integrale längs des Randes R genommen werden müssen. Nun ist das letzte dieser Integrale gleich Null; wenn nämlich x den Rand R durchläuft, beschreibt der Punkt $1 - u$ einen Weg, welcher zufolge der Ungleichheit $|u| < 1$ die Nullstelle $u = 1$ ausschließt; daher kann sich $\log(1 - u)$ nach Durchlaufung dieses Weges nicht geändert haben, und somit ist vermöge (6) der Satz bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß jede einzelne der Funktionen:

$$g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x),\ \ldots,\ g_n(x),\ \ldots$$

ebenso wie $f(x)$ im Innern eines Gebietes G den Charakter einer ganzen rationalen Funktion besitzt. Weiter setzen wir voraus, daß gleichmäßig für die Umgebung einer beliebigen Stelle des Gebietes G

$$\lim_{n=\infty} g_n(x) = f(x)$$

ist. Es sei dann a eine Stelle des Gebietes G, an welcher $f(x)$ von der r^{ten} Ordnung verschwindet. Um diese Stelle herum grenzen wir ein kleines, ganz im Innern von G liegendes Gebiet G' ab, innerhalb dessen, einschließlich des Randes, die Funktion $f(x)$ nicht verschwindet, außer an der Stelle a. Dann ist längs des Randes von G' beständig $|f(x)| < \varepsilon$, wo ε eine positive, von Null verschiedene Zahl bedeutet. Nun kann man aber nach der Voraussetzung N so groß wählen, daß für alle Stellen des Bereiches G'

$$|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$$

angenommen werden kann, sobald nur $n > N$ ist. Also verschwindet nach dem vorhergehenden Hilfssatze von $n = N$ an jede Funktion $g_n(x)$ ebenso oft wie $f(x)$, also r-mal im Innern von G'. Hierbei ist noch zu bemerken, daß der Bereich G' beliebig verkleinert werden kann, so daß die r Nullstellen von $g_n(x)$ mit unendlich wachsendem n der Stelle a unendlich nahe rücken.

Liegen umgekehrt in jeder noch so kleinen Umgebung von $x = a$ unendlich viele Wurzeln der Gleichungen:

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \ldots,$$

so ist a notwendig eine Nullstelle von $f(x)$. Andernfalls würde man nämlich um $x = a$ einen kleinen Bereich abgrenzen können, innerhalb dessen $|f(x)| > \varepsilon$ wäre, wo ε eine positive, von Null verschiedene Größe bezeichnet. Da andererseits n so groß gewählt werden kann, daß erstens $g_n(x)$ für einen Punkt $x = x_0$ jenes Bereiches verschwindet und zweitens $|f(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ ist, so ergibt sich für die Stelle x_0 der Widerspruch, daß gleichzeitig $|f(x_0)| > \varepsilon$ und $|f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Daher ist die Annahme, $f(x)$ sei für $x = a$ von Null verschieden, unzulässig.

Unter den oben gegebenen Voraussetzungen haben wir also folgenden Satz bewiesen:

Im Innern von G sind die Nullstellen der Funktion $f(x)$ identisch mit denjenigen Stellen, an welchen sich die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(x) = 0,\; g_2(x) = 0,\; \ldots,\; g_n(x) = 0,\; \ldots$$

verdichten; und zwar liegen in einer beliebig kleinen Umgebung der Stelle a, welche eine r-fache Nullstelle von $f(x)$ ist, genau r Wurzeln der Gleichung $g_n(x) = 0$, sobald n eine bestimmte, von der Größe jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet.

Die Anwendung auf denjenigen Fall, in welchem $f(x)$ eine Potenzreihe bedeutet, $g_n(x)$ aber die Summe ihrer n ersten Glieder ist, ist klar. Wir finden außerdem folgendes Corollar:

Man kann die Nullstellen von $f_{\nu-1}(x)$ mit beliebiger Genauigkeit durch Auflösung der Gleichung $g_n(x) = 0$, wo $g_n(x)$ das transformierte Lommelsche Polynom bedeutet, für ein hinlänglich großes n finden.

§ 63. Die Funktionen $g_n(x)$ bilden eine Sturmsche Kette.

Um nunmehr die Nullstellen des Lommelschen Polynomes näher zu untersuchen, bemerken wir zuerst, daß die Formel (9) des § 12 für $-\nu - n + 1$ statt ν mittelst der Definition § 62, (3) folgende Rekursionsformel gibt:

$$g_n(x) = (\nu + n - 1) g_{n-1}(x) + x g_{n-2}(x). \tag{1}$$

Setzen wir in dieser Formel wieder $n+1$ und $n+2$ für n, so finden wir durch Elimination von g_{n+1} und g_{n-1} aus den so erhaltenen drei Gleichungen folgende weitere Formel:

$$\begin{cases} (\nu + n - 1) g_{n+2}(x) = \\ = (\nu + n)\big((\nu + n)^2 - 1 + 2x\big) g_n(x) - (\nu + n + 1) x^2 g_{n-2}(x). \end{cases} \tag{2}$$

Denkt man sich nun ν reell und führt man in (2) für n die positiven, ganzen und geraden Zahlen, von 2 an gerechnet, ein, so findet man eine Kette ganzer rationaler Funktionen:

$$V_m, V_{m-1}, \ldots, V_{p+1}, V_p, V_{p-1}, \ldots, V_1, V_0; \qquad V_q = g_{2q}(x),$$

welche folgende Eigenschaften besitzen und somit ganz analog sind zu einer Sturmschen Funktionenkette[1]):

1) Der Grad von V_q ist genau gleich q, und der Koeffizient der q^{ten} Potenz von x ist eine positive Größe, insbesondere ist V_0 eine positive Konstante.

2) Wenn für einen reellen Wert von x die Funktion V_q, wo $p \neq q$ anzunehmen ist, verschwindet, besitzen die benachbarten Funktionen V_{q+1} und V_{q-1} nichtverschwindende Werte von entgegengesetztem Vorzeichen. Die Funktion V_p besitzt dagegen die ausgezeichnete Eigenschaft, daß, wenn V_p für einen reellen Wert von x verschwindet, V_{p+1} und V_{p-1} nichtverschwindende Werte von demselben Vorzeichen haben.

3) Wenn x die reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so geht der Quotient $V_m : V_{m-1}$ überall, wo er verschwindet, von negativen zu positiven Werten über.

4) Die Gleichung $V_m = 0$ hat keine mehrfachen reellen Wurzeln.

Wir haben nun nachzuweisen, daß die Funktionen $V_q = g_{2q}(x)$ wirklich diesen Bedingungen genügen.

Die Bedingung 1) ist eine direkte Folge der § 62, (3) für $g_n(x)$ gegebenen Definition, während 2) unmittelbar aus Formel (2) her-

1) H. Weber: Lehrbuch der Algebra Bd. I, p. 271; Braunschweig 1895.

vorgeht, wenn p eine solche positive ganze Zahl bedeutet, daß $\nu + 2p + 1 > 0$ ist, während $\nu + 2p - 1 < 0$ angenommen werden kann.

Die Bedingungen (3) und (4) sind offenbar dann und nur dann möglich, wenn die Funktionaldeterminante Δ_{2n}, wobei man:

$$(3) \qquad \Delta_n = g_{n-2}(x) g_n^{(1)}(x) - g_{n-2}^{(1)}(x) g_n(x)$$

setzt, für jede reelle Nullstelle von $g_{2n}(x)$ einen positiven, nichtverschwindenden Wert besitzt; denn man hat offenbar für hinlänglich kleine Werte von $|h|$ folgende Taylorsche Reihenentwicklung:

$$\frac{g_{2n}(x+h)}{g_{2n-2}(x+h)} = \frac{g_{2n}(x)}{g_{2n-2}(x)} + \frac{\Delta_{2n}}{\left(g_{2n-2}(x)\right)^2} \cdot \frac{h}{1!} + \cdots.$$

Wir finden aber aus (1), daß:

$$(4) \qquad \Delta_{2n} = \left(g_{2n-2}(x)\right)^2 + (\nu + 2n - 1)\Delta_{2n-1}$$

ist, und wollen nun beweisen, daß Δ_{2n-1} von einem gewissen Wert von n ab für jeden reellen Wert von x positiv ist, woraus dann dasselbe unmittelbar für Δ_{2n} selbst folgt. Zu diesem Zweck benutzen wir den Ausdruck § 62, (4) und finden demnach aus (3), daß:

$$(5) \quad \Delta_n = \left(\frac{\pi}{\sin \nu\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{\Gamma(\nu - n + 2)}\right)^2 \left(f_{\nu-1}(x)\right)^2 \left(\frac{1}{\nu + n - 1} + \cdots\right) + \cdots$$

ist, wo die durch Punkte angedeuteten Terme gegen die berücksichtigten mit unendlich wachsendem n verschwinden. Wenn aber x einen Wert annimmt, für welchen $f_{\nu-1}(x) = 0$ ist, so haben wir dafür folgenden Ausdruck zu setzen:

$$(6) \qquad \Delta_n = \left(\frac{\pi}{\sin \nu\pi}\right)^4 (-x)^{n-1} + \cdots.$$

Aus diesen Formeln schließt man unschwer, daß man N so groß wählen kann, daß Δ_{2n-1}, wenn x irgend ein endliches reelles Intervall durchläuft, immer positiv bleibt, wenn nur $n > N$ angenommen wird. Weiter findet man aus § 62, (1) und (3) die folgenden Ausdrücke:

$$(7) \quad \Delta_{2n-1} = \frac{n(n-1)(\nu+n-1)(\nu+n-2)}{6}\left(2n^2 + 2n(\nu-2) - \nu\right)x^{2n-2} + \cdots,$$

$$(8) \quad \Delta_{n+2} = (\nu + n)\left(g_n(x)\right)^2 + x^2\Delta_n,$$

wo in (7) wieder die durch Punkte angedeuteten Terme gegen die berücksichtigten mit unendlich wachsendem n verschwinden. Aus diesen Formeln erhellt aber, daß Δ_{2n-1} für unendlich große Werte von x positiv ist, wenn nur n eine gewisse Zahl überschreitet, und

daß Δ_{2n+1} noch für die eventuellen äußersten Nullstellen von Δ_{2n-1} positiv sein muß, also nur zwischen diesen Nullstellen negativ werden könnte; es gilt also:

Die Funktionaldeterminante Δ_{2n-1} *ist für jeden reellen Wert von* x *positiv, sobald nur* n *eine gewisse Zahl überschreitet.*

Derselbe Satz gilt demnach auch für Δ_{2n}, wenn $f_{\nu-1}(x)$ für keinen positiven Wert von x verschwindet, denn dann ist (5) immer anwendbar. Für die Umgebung einer positiven Nullstelle von $f_{\nu-1}(x)$ besitzt hingegen Δ_{2n} bei genügend großen Werten von n das negative Zeichen, wie dies aus (6) ersichtlich ist.

Also bilden die rationalen Funktionen $g_n(x)$ eine Sturmsche Funktionenkette.

§ 64. Über die Nullstellen von $g_n(x)$.

Wir betrachten jetzt die Funktionenreihe:

$$V_p, V_{p-1}, \ldots, V_1, V_0. \tag{1}$$

Offenbar besitzt sie p Zeichenwechsel für $\nu = -\infty$ und p Zeichenfolgen für $x = +\infty$. Da man nun nach dem Sturmschen Satze[1]) nur dadurch einen Zeichenwechsel verlieren kann, daß x eine Wurzel der Gleichung $V_p = 0$ passiert und dabei zugleich $V_p : V_{p-1}$ von negativen zu positiven Werten übergeht, so folgt:

Die Wurzeln der Gleichung $V_p = 0$ *sind sämtlich reell und voneinander verschieden, und der Quotient* $V_p : V_{p-1}$ *geht, wenn* x *eine Wurzel der Gleichung* $V_p = 0$ *überschreitet, stets von einem negativen zu einem positiven Werte über.*

Hieraus folgt, daß die Anzahl der Wurzeln von $V_p = 0$, welche zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegen, genau gleich der Anzahl der Zeichenwechsel ist, welche die Reihe (1) verliert, während x von α bis β wächst, wenn $\alpha < \beta$ vorausgesetzt wird.

Wenden wir uns nun zu den ganzen rationalen Funktionen $g_n(x)$, so finden wir dementsprechend den spezielleren Satz:

Wenn $\nu > -1$ *ist, so sind die Wurzeln der Gleichungen:*

$$g_2(x) = 0, \quad g_4(x) = 0, \quad \cdots, \quad g_{2n}(x) = 0$$

sämtlich reell.

Um die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $g_{2n}(x) = 0$ zu finden, betrachten wir zunächst die Reihe:

1) H. Weber: Lehrbuch der Algebra Bd. I, p. 273.

$$g_0(0) = 1, \quad g_2(0) = \nu(\nu + 1), \quad \cdots,$$
$$g_{2n+2}(0) = (\nu + 2n)(\nu + 2n + 1) g_{2n}(0).$$

Ist $\nu > 0$, so finden wir hier keinen Zeichenwechsel; wenn dagegen $0 > \nu > -1$ ist, so finden wir nur einen; da nun immer $g_n(+\infty) = +\infty$ ist, so folgt:

Die Gleichung $g_{2n}(x) = 0$ hat eine positive und $n - 1$ negative Wurzeln, wenn $0 > \nu > -1$ ist; dagegen sind für $\nu > 0$ alle Wurzeln jener Gleichung negativ.

Nun betrachten wir die ganze Funktionenkette:

(2) $$V_m, V_{m-1}, \cdots, V_{p+1}, V_p, V_{p-1}, \cdots, V_1, V_0;$$

sie verliert, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, m Zeichenwechsel. Der Verlust eines Zeichenwechsels kann erstens nur eintreten beim Überschreiten einer Nullstelle von V_m und zweitens beim Überschreiten einer Nullstelle von V_p, und zwar gehen in letzterem Falle immer zugleich zwei Zeichenwechsel verloren. Denn da der Quotient $V_p : V_{p-1}$ kurz vor einer Nullstelle von V_p negativ ist, so erhalten die Funktionen V_{p+1}, V_p, V_{p-1} kurz vor, respektive kurz nach dem Überschreiten einer Nullstelle die Zeichen $+ - +$ oder $- + -$, respektive $+ + +$ oder $- - -$; also haben wir folgenden zweiten Satz:

Die Gleichung $V_m = 0$ hat $2p$ imaginäre und $m - 2p$ reelle Wurzeln.

Um die Zahl $r_{\alpha\beta}$ der reellen Wurzeln von $V_m = 0$ zu bestimmen, welche zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$, für $\alpha < \beta$, liegen, bezeichne man mit A die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (2), mit A' die Zahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe (1) verliert, wenn x von α bis β wächst; wenn also $r'_{\alpha\beta}$ die Zahl der in den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegenden reellen Wurzeln von $V_p = 0$ bezeichnet, so findet man:

$$r_{\alpha\beta} + 2r'_{\alpha\beta} = A, \quad r'_{\alpha\beta} = A',$$

woraus sich *für die gesuchte Anzahl der reellen Wurzeln von $V_m = 0$, welche zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegen,*

$$r_{\alpha\beta} = A - 2A'$$

ergibt.

Als Corollar finden wir demnach für unsere g-Funktionen folgenden Satz:

Wenn p eine positive ganze Zahl bedeutet und

$$-2p - 1 < \nu < -2p + 1$$

ist, so hat die Gleichung $g_{2n}(x) = 0$ *genau* $2p$ *imaginäre Wurzeln, falls* n *eine gewisse Zahl* N *überschreitet. Zugleich ist von den reellen Wurzeln dieser Gleichung eine oder keine positiv, je nachdem*

$$-2p-1 < \nu < -2p \quad \textit{oder} \quad -2p < \nu < -2p+1$$

ist.

Nach diesen Erörterungen gehen wir nunmehr zur Untersuchung der Nullstellen von $J^\nu(x)$ selbst über.

§ 65. Satz von Hurwitz über die Nullstellen von $J^\nu(x)$.

Da die Nullstellen von $f_{\nu-1}(x)$ vermöge § 62 mit den Verdichtungsstellen der Wurzeln von:

$$g_2(x) = 0, \quad g_4(x) = 0, \quad \cdots, \quad g_{2n}(x) = 0$$

übereinstimmen, so ergibt sich aus den Resultaten des § 64, wenn man nur $\nu + 1$ für ν setzt, ohne weiteres:

Die Wurzeln der Gleichung $f_\nu(x) = 0$ *sind sämtlich reell, falls* $\nu > -2$ *ist; die Wurzeln sind für* $\nu > -1$ *sämtlich negativ; dagegen ist eine derselben positiv und sind die übrigen negativ, wenn* $-2 < \nu < -1$ *ist.*

Der Fall, wo $\nu < -2$ ist, erfordert indessen noch weitere Entwicklungen, weil die Verdichtungsstellen eines Systemes imaginärer Werte nicht notwendig imaginär sind. Wir betrachten daher zunächst die Gleichung:

$$(1) \qquad g_{2n}(x) + \lambda g_{2n+1}(x) = 0,$$

in welcher λ eine reelle Konstante bezeichnet. Ist $\lambda = 0$ und hat n einen genügend großen Wert, während $-2p-1 < \nu < -2p+1$ ist, so besitzt diese Gleichung genau $2p$ imaginäre Wurzeln. Wenn nun λ von Null bis zu irgend einem Werte λ_0 variiert, so kann sich die Zahl der imaginären Wurzeln nur dann verändern, wenn λ einen Wert passiert, für welchen (1) eine Doppelwurzel erhält. Ist aber α ein solcher Wert, so hat man aus (1):

$$g_{2n}^{(1)}(\alpha) = -\lambda g_{2n+1}^{(1)}(\alpha),$$

und somit wird mittelst § 63, (3) für diesen Wert von x:

$$\Delta_{2n+1} = -g_{2n+1}^{(1)}(\alpha)\left(g_{2n}(\alpha) + \lambda g_{2n+1}(\alpha)\right) = 0,$$

was nach dem vorigen Paragraphen nicht angeht; also gilt:

Die Gleichung (1) *hat für jeden reellen Wert von* λ *genau* $2p$ *imaginäre Wurzeln.*

Wenn daher λ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, so durchlaufen die imaginären Wurzeln der Gleichung (1) eine Kurve, welche aus $2p$ getrennten Zweigen besteht. Sei nun:

(2) $$x = \xi + i\eta, \quad x' = \xi - i\eta,$$

so ist die Gleichung der genannten Kurve:

(3) $$\varphi_n(\xi, \eta) = \frac{g_{2n+1}(x)\, g_{2n}(x') - g_{2n+1}(x')\, g_{2n}(x)}{x - x'} = 0,$$

und die Glieder höchster Dimension von $\varphi_n(\xi, \eta)$ lauten:

$$c(xx')^{n-1} = c(\xi^2 + \eta^2)^{n-1},$$

$$c = \frac{n(n+1)(\nu+n)(\nu+n-1)}{6}\left(2n^2 + 2\nu n + \nu - 2\right).$$

Die Kurve $\varphi_n(\xi, \eta) = 0$ ist also von der $(2n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung und trifft die unendlich ferne Gerade nur in den imaginären Kreispunkten, welche $(n-1)$fache Punkte der Kurve sind.

Die $2p$ Zweige der Kurve (3) *sind daher ganz im Endlichen liegende Ovale.*

Da für $\eta = 0$, also $x = x'$, die Funktion $\varphi_n(\xi, \eta)$ in Δ_{2n+1} übergeht (wenn man nämlich in (3) zuerst im Zähler und Nenner nach x differentiiert und dann $x = x'$ setzt), so treffen die Ovale nicht die Achse der reellen Zahlen, und es geht $\varphi_n(\xi, \eta)$, wenn sich der Punkt $x = \xi + i\eta$ von einem reellen Werte aus so bewegt, daß er eines der Ovale überschreitet, von positiven zu negativen Werten über. Nun findet man aber mit Hilfe von § 63, (1):

(4) $$\varphi_{n+1}(\xi, \eta) = (\nu + 2n + 1)\, g_{2n+1}(x)\, g_{2n+1}(x') + xx'\varphi_n(\xi, \eta);$$

φ_{n+1} ist also noch positiv, wenn φ_n verschwindet, abgesehen von denjenigen Punkten von $x = \xi + i\eta$, welche die Gleichung $\varphi_{2n+1} = 0$ befriedigen und gleichzeitig auf den Kurven $\varphi_{n+1} = 0$ und $\varphi_n = 0$ liegen.

Hieraus geht hervor, daß jedes Oval der Kurve $\varphi_{2n+1} = 0$ je ein Oval der Kurve $\varphi_n = 0$ in einem Punkte, für welchen $g_{2n+1} = 0$ ist, von innen berührt. Die $2p$ Ovale werden sich ferner mit wachsendem n immer mehr verkleinern, bis sie sich für $n = \infty$ auf $2p$ Punkte zusammengezogen haben. Da nämlich die Grenzstellen der Punkte eines Ovales Nullstellen von $f_{\nu-1}(x)$ sind und letztere diskret über die Ebene verteilt sind, so kann die Grenze jedes Ovales nur ein Punkt sein. Auf demselben Grunde beruht die Richtigkeit der stillschweigend gemachten Annahme, daß die $2p$ Ovale der Kurve $\varphi_n = 0$ sämtlich auseinander liegen.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun der Satz:

Die Gleichung $f_\nu(x) = 0$ hat für negative, zwischen $-2p-2$ und $-2p$ liegende Werte von ν genau $2p$ paarweise konjugierte imaginäre und übrigens unendlich viele reelle Wurzeln. Zur näheren Bestimmung der imaginären Wurzeln hat man eine unendliche Reihe algebraischer Kurven:

$$\varphi_n(\xi, \eta) = 0, \quad \varphi_{n+1}(\xi, \eta) = 0, \quad \cdots,$$

von denen jede einzelne aus $2p$ im Endlichen und auseinander liegenden Ovalen besteht. Das einzelne Oval der Kurve $\varphi_n = 0$ berührt und umschließt je ein Oval der nächstfolgenden Kurve und enthält in seinem Innern je eine imaginäre Nullstelle von $f_\nu(x)$. Auf diese Nullstelle zieht sich das Oval mit wachsendem n immer mehr und mehr zusammen.

Wir bemerken, daß, wenn ν kontinuierlich in einen ganzzahligen negativen Wert übergeht, die imaginären Wurzeln sämtlich unendlich klein werden.

Über die reellen Wurzeln folgt noch nach § 64:

Von den reellen Wurzeln der Gleichung $f_\nu(x) = 0$ sind entweder alle oder alle bis auf eine negativ, je nachdem

$$-2p-1 < \nu < -2p \quad \textit{oder} \quad -2p-2 < \nu < -2p-1 \qquad \textit{ist.}$$

Kehren wir nun zur Besselschen Cylinderfunktion zurück, so haben wir also $-x^2 : 2$ für x zu setzen und bekommen so folgenden Satz:

XI. *Wenn ν reell und größer als -1 ist, sind sämtliche Nullstellen von $J^\nu(x)$ reell; dagegen hat diese Funktion unendlich viele reelle Nullstellen und dazu genau $2p$ paarweise konjugierte imaginäre, wenn $-2p+1 > \nu > -2p-1$ vorausgesetzt wird, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet.*

Hier brechen wir unsere Darstellung der schönen Untersuchungen von Hurwitz ab, weil seine weiteren Resultate nicht denselben allgemeinen Charakter haben, und wenden uns nunmehr zur näherungsweisen Bestimmung der Lage dieser reellen Nullstellen.

§ 66. Angenäherte Lage der Nullstellen. Sätze von Schafheitlin.

Schon Euler[1]) hat bemerkt, daß $J^0(2\sqrt{x})$ unendlich viele positive Nullstellen besitzt und die drei ersten dieser Nullstellen beziehentlich bis auf sechs, vier und zwei Decimalstellen berechnet. Später hat Poisson[2]) einige Nullstellen von $J^1(x)$ berechnet; seine

1) Acta Academiae Petropolitanae 1781.

2) Mémoires de l'Académie des Sciences Paris, Bd. 8, p. 485, 506, 522; 1829.

Resultate sind indessen, wie Stern[1]) hervorhebt, durchgehends ungenau. Abgesehen von den Ergebnissen, welche die allgemeine Tafel für die Besselsche Cylinderfunktion über die Nullstellen dieser Funktion liefert, hat dann Meissel[2]) die zehn ersten Nullstellen von $J^0(x)$ berechnet, während neuerdings Wilson und Peirce[3]) die vierzig ersten dieser Nullstellen ausgerechnet haben.

Allgemeinere Methoden zur Berechnung dieser Nullstellen sind von Meissel[4]) angegeben worden, während Mac Mahon[5]) noch allgemeinere Entwicklungen geliefert hat. Indessen sind diese Entwicklungen vorläufig nur von durchweg praktischer Bedeutung, weil keine Untersuchungen über die zugehörigen Restglieder vorliegen, so daß daraus allgemeine Schlüsse über die Lage der Nullstellen nicht gezogen werden können.

Wenn wir uns nunmehr zu denjenigen allgemeinen Resultaten wenden, welche man bisher über die näherungsweise Lage der Nullstellen gefunden hat, so bemerken wir zunächst, daß schon Bessel[6]) eine Abschätzung für die Nullstellen von $J^0(x)$ angegeben hat. Rudski[7]) hat den Fall betrachtet, in welchem der Parameter ν von $J^\nu(x)$ die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist; seine Resultate über die Lage der zugehörigen Nullstellen sind allerdings, wie Schafheitlin bemerkt hat, für die ersten dieser Nullstellen nicht zutreffend. Schafheitlin[8]) hat vielmehr gezeigt, daß das Intervall zweier aufeinander folgender Nullstellen von $J^0(x)$ kleiner als π sein muß, während Bôcher[9]) später für dasselbe Intervall eine weniger gute Annäherung fand. Das Resultat von Schafheitlin ist, freilich ohne Beweis, schon von dem großen englischen Mathematiker Hamilton[10]) angegeben worden.

Neuerdings hat Schafheitlin[11]) seine Untersuchungen wieder aufgenommen und weitergeführt, so daß er, außer vielen neuen, alle bisher bekannten Resultate in verallgemeinerter Form gefunden hat.

---

1) Journal für Mathematik Bd. 22, p. 35, 39; 1841.
2) Abhandlungen der Berliner Akademie 1888.
3) Bulletin of the American Math. Soc. (2) Bd. 3, p. 153—155; 1897.
4) Programm der Oberrealschule in Kiel; 1890.
5) Annals of Mathematics Bd. 9, p 23—30; 1894.
6) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 40.
7) Mémoires de la Société Royale de Liège (2) Bd. 18; 1895.
8) Journal für Mathematik Bd. 114; 1894.
9) Bulletin of the American Math. Soc. (2) Bd. 5; 1899.
10) Transactions of the Royal Irish Academy Bd. 19 II p. 309; 1843.
11) Journal für Mathematik Bd. 122; 1900.

Wir können seine Beweise hier nicht mitteilen, sondern bemerken nur, daß er ihnen folgendes von ihm selbst früher gefundene[1]) Integral zu Grunde gelegt hat:

$$(1)\quad J^{\nu}(x) = \frac{2^{\nu+1} x^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\omega)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\,\omega\right)}{(\sin\omega)^{2\nu+1}} \cdot e^{-2x\cot\omega}\, d\omega,$$

wo $\Re(x)$ im allgemeinen als positiv anzunehmen ist.

Schafheitlin hat für die Lage der Nullstellen von $J^{\nu}(x)$ folgende Abschätzungen gefunden:

I. *Die erste Nullstelle von* $J^{\nu}(x)$ *liegt zwischen* $\sqrt{\nu(\nu+2)}$ *und* $\sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}$; *falls* $2\nu > 7$ *ist, findet man die einfachere obere Grenze:* $\sqrt{2(\nu+1)(\nu+2)}$.

Für die zweite und die nächstfolgenden Nullstellen ist es ihm, falls ν ein größerer Wert beigelegt wird, nicht gelungen, so einfache Grenzen festzustellen. Dagegen findet man für die ferneren Nullstellen, wenn n eine ganze und nicht negative Zahl bedeutet:

II. *Ist* $x > \left(4(n+2)^2 - 1\right) : \pi$, *so liegen die Nullstellen von* $J^n(x)$ *innerhalb der Intervalle* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *bis* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *bez.* $k\pi$ *bis* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist;* k *bedeutet hierbei eine ganze Zahl.*

III. *Ist* $x > \left(4(n+3)^2 - 1\right) : \pi$, *so liegen die Maxima und Minima von* $J^n(x)$ *innerhalb der Intervalle* $k\pi$ *bis* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *bez.* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *bis* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

IV. *Wenn* $x > \left(4(n+3)^2 - 1\right) : \pi$ *ist, muß die Differenz zweier aufeinander folgender Nullstellen von* $J^n(x)$ *zwischen* $\frac{3\pi}{4}$ *und* $\frac{3\pi}{2}$ *liegen.*

V. *Sämtliche Nullstellen von* $J^0(x)$ *liegen zwischen* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *und* $(k+\frac{7}{8})\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluß der Null zu durchlaufen hat.*

Hamilton[2]) gibt für diese Nullstellen als Intervall $k\pi$ bis $(k+\frac{1}{2})\pi$ an.

VI. *Sämtliche Nullstellen von* $J^1(x)$ *liegen zwischen* $(k+\frac{1}{8})\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Werte mit Ausschluß der Null annehmen kann.*

Für die Poissonschen Cylinderfunktionen findet man außerdem den Satz:

---

1) Journal für Mathematik Bd. 114, p. 40; 1894. 2) loc. cit. p. 309.

VII. *Ist* $x > \left(4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) : \pi$, *so liegen die Nullstellen von* $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ *innerhalb der Intervalle* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *bis* $k\pi$, *bez.* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *bis* $(k+\frac{1}{2})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Diese Annäherungsresultate zeigen also, daß die Verteilung der reellen Nullstellen von $J^\nu(x)$ ziemlich regelmäßig sein muß.

§ 67. Sätze von Schafheitlin über die Nullstellen von $Y^n(x)$.

Ehe wir die Integralformeln des § 28 für die Nullstellen des Hauptwertes von $Y^\nu(x)$ anwenden dürfen, haben wir zuvor zu beweisen, daß dieser Hauptwert, wenn $-1 < \nu < +1$ vorausgesetzt wird, keine rein imaginären Nullstellen haben kann.

Für $Y^0(x)$ ist dies einleuchtend, weil hier imaginäre Werte einzig aus dem Logarithmus herrühren könnten und $J^0(x)$ für einen solchen Wert von x immer positiv sein muß. Im allgemeineren Falle setzen wir der Kürze halber:

$$A_\nu = \left(\frac{2}{xi}\right)^\nu J^\nu(xi) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)},$$

so daß A_ν, für reelle x und $-1 < \nu < +1$, immer positiv sein muß. Wäre nun xi eine rein imaginäre Nullstelle von $Y^\nu(x)$, so müßte zufolge der Definition dieser Funktion folgende Gleichung gelten:

$$\cos \nu\pi A_\nu - e^{\mp\nu\pi i} A_{-\nu} = 0$$

oder, was dasselbe ist, $A_\nu = A_{-\nu} = 0$ sein; dies ist aber, wie wir soeben gesehen haben, unmöglich.

Setzt man weiterhin:

(1) $$\alpha = \varrho e^{\varphi i}, \quad \beta = \varrho e^{-\varphi i},$$

so muß, falls α eine Nullstelle des Hauptwertes von $Y^\nu(x)$ ist, β gleichfalls eine sein; bei dieser Bedeutung von α und β ergibt aber § 28, (6):

(2) $$\int_0^1 x\, Y^\nu(\alpha x)\, Y^\nu(\beta x)\, dx = 0, \qquad \nu \neq 0,$$

während man aus § 28, (7) das weitere Resultat erhält:

(3) $$\int_0^1 x\, Y^0(\alpha x)\, Y^0(\beta x)\, dx = -\frac{4\varphi}{\pi^2 \varrho^2 \sin 2\varphi}.$$

Die Gleichung (2) ist aber unmöglich, und dasselbe ist für (3) der Fall, weil ja für den Hauptwert $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}$ sein muß; wir haben so folgenden Satz bewiesen:

I. *Ist* $-1 > \nu > +1$, *so hat der Hauptwert von* $Y^\nu(x)$ *keine komplexen Nullstellen.*

Für $\nu = 0$ ist dieser Satz von Schafheitlin[1]) gefunden worden.

Durch die am Schlusse des § 28 angegebene Methode gelangt Schafheitlin[2]) dann zu der weiteren Formel:

$$(4)\quad \begin{cases} \int\limits_0^1 x^3 Y^1(\alpha x) Y^1(\beta x) dx = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} Y^0(\alpha) Y^0(\beta) - \frac{8(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi^2 \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)^2} + \\ \qquad + \frac{32\alpha\beta}{\pi^2(\alpha^2 - \beta^2)^3} \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \end{cases}$$

wo α und β verschiedene Nullstellen von $Y^1(x)$ bedeuten. Stellt man nun diese Nullstellen unter der Form (1) dar, so findet man sehr leicht einen zweiten Satz, der ebenfalls Schafheitlin[3]) angehört:

II. *Der Hauptwert von $Y^1(x)$ kann keine komplexen Nullstellen haben.*

Durch Anwendung des zu § 66, (1) analogen Integrales[4]):

$$(5)\quad Y^\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\omega)^{\nu - \frac{1}{2}} \cdot \cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{2}\,\omega\right)}{(\sin\omega)^{2\nu+1}} \cdot e^{-2x\cot\omega}\, d\omega,$$

wo $\Re(x)$ im allgemeinen als positiv anzunehmen ist, gelangte dann Schafheitlin[5]) über die angenäherte Lage der Nullstellen von $Y^n(x)$ noch zu folgenden Resultaten:

III. *Sämtliche Nullstellen von $Y^0(x)$ liegen zwischen $(k + \frac{1}{4})\pi$ und $(k + \frac{3}{8})\pi$, wo k alle ganzen, nicht negativen Zahlen zu durchlaufen hat.*

IV. *Die erste Nullstelle von $Y^1(x)$ liegt zwischen $\pi:2$ und $3\pi:2$, während die übrigen für $k \geqq 1$ zwischen $(k + \frac{5}{8})\pi$ und $(k + \frac{3}{4})\pi$ liegen müssen.*

V. *Ist $x > \left(4(n+2)^2 - 1\right) : \pi$, so liegen die Nullstellen von $Y^n(x)$ innerhalb der Intervalle $k\pi$ bis $(k + \frac{1}{4})\pi$, bez. $(k + \frac{1}{2})\pi$ bis $(k + \frac{3}{4})\pi$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.*

Die Verteilung der Nullstellen von $Y^n(x)$ ist also gleichfalls ziemlich regelmäßig.

1) Archiv für Mathematik und Physik (1) Bd. 1, p. 135; 1901.
2) loc. cit. p. 136.
3) loc. cit. p. 136.
4) Journal für Mathematik Bd. 114, p. 40; 1894.
5) Journal für Mathematik Bd. 122, p. 314; 1900.

ZWEITER TEIL.

BESTIMMTE INTEGRALE MIT CYLINDERFUNKTIONEN.

Kapitel XII.

Integralbestimmungen durch Reihenentwicklung.

§ 68. Anwendungen des ersten Eulerschen Integrales.

Schon in Kapitel III haben wir gezeigt, wie sich uns das erste Eulersche Integral als ein leichtes Mittel zur Herleitung elementarer Integraldarstellungen der Besselschen Cylinderfunktion und analoger Funktionen darbietet. Als Einleitung zu unseren allgemeinen Untersuchungen über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen wollen wir hier noch einige ähnliche Formeln ableiten, welche früher nicht Platz gefunden haben.

1) Bei Einführung der unendlichen Reihe an Stelle der Lommelschen Funktion findet man durch gliedweise Integration mittelst (Γ_{16}) folgende Formel:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Pi^{\nu, 2\varrho - \nu}(x \sin\varphi)(\sin\varphi)^{1-\nu}(\cos\varphi)^{2\nu - 2\varrho - 1}\, d\varphi = \\ &\qquad = \frac{x^{\varrho - \nu}\, \Gamma(\nu - \varrho) \cos \pi(\nu - \varrho)}{2^{\varrho - \nu + 1}} \cdot J^{\varrho}(x), \end{aligned} \right.$$

wo man

$$(1\text{a})\qquad 1 > \Re(\nu - \varrho) > 0$$

voraussetzen muß. Setzt man in dieser Formel $-\nu$ für ν und $\varrho = 0$, so erhält man die speziellere:

$$(2)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\nu}(x \sin\varphi)(\sin\varphi)^{\nu+1}(\cos\varphi)^{-2\nu-1}\, d\varphi = \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} J^0(x),$$

die anwendbar ist, sobald:

$$(2\text{a})\qquad 0 > \Re(\nu) > -1$$

vorausgesetzt wird.

2) Dasselbe Verfahren liefert ohne weiteres die Formel:

$$\int_0^1 e^{ixt(1-t)}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\nu}\Phi^{\nu,\varrho}\Big(xt(1-t)\Big)\,dt = \frac{1}{i^{\nu}\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\varrho+s+\frac{1}{2})\,(2xi)^{\varrho+s}}{\Gamma(2\varrho+2s+2)},$$

wo die Reihe linker Hand mittelst (Γ_4) reduziert werden kann. Setzt man ferner $4x^2i$ für x und $t=\sin^2\frac{1}{2}\varphi$, so findet man:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x^2\sin^2\varphi}\cdot\Phi^{\nu,\varrho}(ix^2\sin^2\varphi)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2\nu}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{e^{\left(\varrho-\frac{\nu}{2}\right)\pi i}}{x\sqrt{2}}\cdot \\ \displaystyle\qquad\qquad\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(x\sqrt{2})^{2\varrho+2s+1}}{\Gamma(\varrho+s+1)\,(2\varrho+2s+1)}, \end{cases}$$

wo man voraussetzen muß, daß:

$$(3a)\qquad \Re(\varrho\pm\nu) > -1$$

ist. Setzt man speziell $\varrho=0$, so gewinnt man die weitere Formel:

$$(4)\quad \int_0^{\pi} e^{-x^2\sin^2\varphi}\cdot\Phi^{\nu}(ix^2\sin^2\varphi)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{2\nu}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{i^{-\nu}}{x\sqrt{2}}\cdot K(x\sqrt{2}),$$

wo $K(x)$ das Krampsche Integral bezeichnet, und wo man:

$$(4a)\qquad 1>\Re(\nu)>-1$$

annehmen muß. Die Annahmen $\nu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$ ergeben weiterhin beziehentlich:

$$(5)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2\sin^2\varphi}\,.\,J^0(ix^2\sin^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{x\sqrt{8}}\cdot K(x\sqrt{2}),$$

$$(6)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2\sin^2\varphi}\cdot K(ix\sin\varphi)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi i}{4}\cdot K(x).$$

3) Wenden wir uns nunmehr zu der allgemeinen Produktformel § 6, (1), so finden wir ohne Mühe, daß:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A^{\nu,\varrho,n}(y\cos\varphi, z\sin\varphi)(\cos\varphi)^{2\nu+1}(\sin\varphi)^{2\varrho+1}\,d\varphi = \frac{(y^2+z^2)^n}{2\cdot n!\,\Gamma(\nu+\varrho+n+2)}$$

ist, was zu der neuen Formel:

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\nu}(xy\cos\varphi)\, J^{\varrho}(xz\sin\varphi)\,(\cos\varphi)^{\nu+1}(\sin\varphi)^{\varrho+1}\,d\varphi = \\ \displaystyle\qquad = \frac{y^{\nu} z^{\varrho}}{x(\sqrt{y^2+z^2})^{\nu+\varrho+1}} \cdot J^{\nu+\varrho+1}\left(x\sqrt{y^2+z^2}\right) \end{cases}$$

führt, wo man voraussetzen muß, daß:

$$(7a)\qquad \Re(\nu) > -1, \quad \Re(\varrho) > -1$$

ist. Dieselbe Formel (7) ist auf ganz andere Weise von Sonin[1]) gefunden worden.

Die Substitution $x\cos\varphi = \xi$ erlaubt uns, das Integral linker Hand in (7) zu transformieren; auf diese Transformation, die sich ja leicht durchführen läßt, gehen wir indessen hier nicht näher ein. Dividiert man dagegen die Formel (7) durch z^{ϱ}, so findet man für $z = 0$ und $y = 1$ die interessante Formel:

$$(8)\qquad \frac{x^{\varrho+1}}{2^{\varrho}\,\Gamma(\varrho+1)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{\nu}(x\cos\varphi)\,(\cos\varphi)^{\nu+1}(\sin\varphi)^{2\varrho+1} = J^{\nu+\varrho+1}(x),$$

die uns bald sehr nützlich sein wird.

§ 69. Integrale von Gegenbauer.

Wie Sonin[2]) gezeigt hat, bietet uns die Formel § 68, (7) ein einfaches Mittel dar, um einige interessante Formeln von Gegenbauer abzuleiten. Setzt man nämlich in der obenerwähnten Formel $\nu = -\frac{1}{2}$ und hinwiederum $\nu - \frac{1}{2}$ für ϱ, so erhält man unmittelbar die speziellere Formel:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(xy\cos\varphi)\, J^{\nu-\frac{1}{2}}(xz\sin\varphi)\,(\sin\varphi)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\varphi = \\ \displaystyle\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \frac{z^{\nu-\frac{1}{2}}}{(y^2+z^2)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot J^{\nu}\left(x\sqrt{y^2+z^2}\right), \end{cases}$$

wo man also $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ voraussetzen muß.

Beachtet man nun weiter, daß das Integral, welches man aus (1) erhält, wenn man $\sin(xy\cos\varphi)$ für $\cos(xy\cos\varphi)$ setzt, gleich Null sein muß, so findet man, daß sich die Formel (1) auch folgendermaßen schreiben läßt:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 36; 1880.

2) loc. cit. p. 37.

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ixy\cos\varphi} J^{\nu-\frac{1}{2}}(xz\sin\varphi)(\sin\varphi)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\varphi = \\ &\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\frac{z^{\nu-\frac{1}{2}}}{(y^2+z^2)^{\frac{\nu}{2}}}\cdot J^{\nu}\left(x\sqrt{y^2+z^2}\right), \end{aligned}\right.$$

eine Formel, aus welcher wir mehrere interessante Resultate herleiten können.

Zu diesem Zwecke setzen wir in (2) $y = a - b\cos\omega$, $z = b\sin\omega$ und finden so:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{ix(a-b\cos\omega)\cos\varphi} J^{\nu-\frac{1}{2}}(bx\sin\omega\sin\varphi)(\sin\varphi)^{\nu+\frac{1}{2}}\,d\varphi = \\ &\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\frac{J^{\nu}(x\Omega)}{\Omega^{\nu}}\cdot(b\sin\omega)^{\nu-\frac{1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

wo wir der Kürze halber:

$$(4)\qquad \Omega = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\omega + b^2}$$

gesetzt haben. Ersetzen wir nun in dem Integrale (3) die dort vorkommende Cylinderfunktion durch das zweite Besselsche Integral § 18, (1a), so ergibt sich ohne Schwierigkeit das Doppelintegral von Gegenbauer[1]):

$$(5)\quad \frac{J^{\nu}(x\Omega)}{\Omega^{\nu}} = \frac{x^{\nu}}{\pi\,\Gamma(\nu)\,2^{\nu}}\cdot\int_0^\pi\int_0^\pi e^{ix(a\cos\varphi - b\cos\Psi)}(\sin\varphi)^{2\nu-1}(\sin\psi)^{2\nu-1}\,d\varphi\,d\psi,$$

wo wir zur Abkürzung:

$$(6)\qquad \cos\Psi = \cos\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega\cos\psi$$

gesetzt haben.

Die Analogie zwischen den Ausdrücken Ω und $\cos\Psi$ und den gewöhnlichen Ausdrücken für eine Seite des ebenen, bez. sphärischen Dreiecks ist offenbar.

Gegenbauer hat noch eine andere Formel angegeben, welche sich als die reziproke zu (5) auffassen läßt, und welche wir folgendermaßen herleiten können: Wir multiplizieren in (3) mit $(\sin\omega)^{\nu+\frac{1}{2}}d\omega$ und integrieren von 0 bis π nach ω; vertauschen wir nun die Integrationsfolge, was offenbar erlaubt ist, so läßt sich die Integration nach ω unmittelbar mittelst (2) ausführen, indem wir in dieser letzten Formel $y = b\cos\varphi$, $z = b\sin\varphi$ setzen. Die Integration

1) Citat von Sonin: Mathematische Annalen Bd. 16, p. 37; 1880.

nach φ läßt sich dann weiter ohne Mühe mittelst § 18, (2) ausführen; wir finden somit folgende Formel:

$$(7)\quad J^{\nu}(ax)J^{\nu}(bx) = \frac{a^{\nu}b^{\nu}x^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\frac{J^{\nu}(x\Omega)}{\Omega^{\nu}}(\sin\omega)^{2\nu}d\omega,\quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2},$$

die nichts anderes ist als die zweite Formel von Gegenbauer.[1])

Die Formel (7) ist später unrichtig von Struve[2]) angegeben worden; es haben nämlich in Struves Formel rechter Hand x und Ω nur die Exponenten 1; Gray und Matthews[3]) drucken die Formel nach Struve ab, ohne den Exponenten von Ω zu berichtigen.

§ 70. Anwendungen des zweiten Eulerschen Integrales.

Es ist offenbar, daß das zweite Eulersche Integral (Γ_{11}) eine Reihe von Anwendungen darbieten muß, die zu den in § 68 von (Γ_{16}) gegebenen analog sind. In der Tat liefert uns dieses Integral denn auch eine ganze Klasse von bestimmten Integralen mit Cylinderfunktionen, welche für unsere folgenden Untersuchungen unentbehrlich sind; wir leiten sie hier folgendermaßen her:

1) Aus Formel § 6, (1) findet man:

$$(1)\quad J^{\nu}(tx)J^{\nu}(ty)e^{-t^2z} = (xy)^{\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s A^{\nu,\nu,s}(x,y)\,e^{-t^2z}\left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu+2s};$$

nimmt man t als eine Größe an, welche von 0 bis $+\infty$ variieren soll, während $\Re(z) > 0$ angenommen wird, so hat die unendliche Reihe rechter Hand in (1) folgende drei Eigenschaften:

a) Die Reihe ist gleichmäßig konvergent, falls $0 < t < +\infty$ ist.

b) Die einzelnen Glieder der Reihe sind von $t = 0$ bis $t = +\infty$ integrabel, falls $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ ist.

c) Die Reihe, welche man durch gliedweise Integration von $t = 0$ bis $t = +\infty$ erhält, ist ebenfalls gleichmäßig konvergent.

Nach diesen Erörterungen erhellt, daß die gliedweise Integration unserer Reihe von $t = 0$ bis $t = +\infty$ einem bekannten Satze[4]) zu-

---

1) Citat von Sonin loc. cit. p. 38.

2) Wiedemann Annalen Bd. 17, p. 1014; 1882.

3) Bessel Functions, p. 238; 1895.

4) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, p. 523; 1892.

folge gestattet ist, und wir finden also mittelst der verallgemeinerten Besselschen Formel § 8, (5) folgende interessante Formel:

$$(2) \qquad \int_0^\infty J^\nu(tx) J^\nu(ty) e^{-t^2 z} \cdot t \cdot dt = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4z} - \frac{\nu\pi i}{2}}}{2z} \cdot J^\nu\left(\frac{xyi}{2z}\right),$$

wo wir also:

$$(2a) \qquad \Re(z) > 0, \quad \Re(\nu) > -1$$

voraussetzen müssen. Für ganze ν ist (2) schon von Hankel[1]) gefunden worden, während Sonin[2]) die allgemeine Formel gegeben hat.

2) Eine Anwendung der Formel (Γ_4) auf § 6, (4) liefert unmittelbar folgende speziellere Produktformel:

$$J^\nu(tx) J^{-\nu}(tx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(s+\frac{1}{2}) x^{2s}}{s! \Gamma(s+\nu+1) \Gamma(s-\nu+1)};$$

auf dieselbe Weise findet man dann die weitere Formel:

$$(3) \qquad \int_0^\infty J^\nu(tx) J^{-\nu}(tx) e^{-t^2 y} \cdot t \cdot dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2y} + \frac{\nu\pi i}{2}}}{2y} \cdot \Phi^\nu\left(\frac{x^2 i}{2y}\right),$$

wo man demnach $\Re(y) > 0$ voraussetzen muß.

Setzt man nun in (2) $y = x$ und hinwiederum y für z, so ergibt sich aus (3) zufolge der Definition § 3, (2) für die Neumannsche Cylinderfunktion folgende neue Formel:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty J^\nu(tx) Y^\nu(tx) e^{-t^2 y} t\, dt = \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2y} - \frac{\nu\pi i}{2}}}{2y} \left(\cot \nu\pi \cdot J^\nu\left(\frac{x^2 i}{2y}\right) - \frac{e^{\nu\pi i}}{\sin \nu\pi} \Phi^\nu\left(\frac{x^2 i}{2y}\right)\right), \end{aligned} \right.$$

welche anwendbar ist, falls:

$$(4a) \qquad \Re(\nu) > -1, \quad \Re(y) > 0$$

vorausgesetzt wird.

In dem ganz speziellen Falle, in welchem ν gleich einer ganzen, nicht negativen Zahl ist, wird der Ausdruck rechter Hand in (4)

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 470; 1875. 2) Ebenda Bd. 16, p. 40; 1880.

unbestimmt; eine Anwendung der Formeln § 19, (10) und § 6, (9) liefert uns indessen ohne Schwierigkeit die folgende Formel:

$$(5)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty J^n(tx)\,Y^n(tx)\,e^{-t^2y}\,t\,dt = \\ \qquad = \dfrac{e^{-\frac{n+1}{2}\pi i}}{4y}\left(H_1^n\left(\dfrac{x^2 i}{2y}\right) + \dfrac{i}{\pi}\cdot\mathfrak{S}^n\left(\dfrac{x^2 i}{2y}\right)\right)e^{-\frac{x^2}{2y}}. \end{cases}$$

Vertauscht man weiterhin in (2) für $y = x$ das Zeichen von ν, so kann man auch das zu (4) analoge Integral mit zwei Neumannschen Cylinderfunktionen bestimmen; doch wird dasselbe, auch für $\nu = 0$, den einzig möglichen ganzen Wert des Parameters, sehr kompliziert.

3) Setzt man $\Re(y) > 0$ und $\Re(\nu + \varrho) > -1$ voraus, so führt dieselbe Methode noch zu folgender Formel:

$$(6)\quad \int\limits_0^\infty J^\nu(tx)\,t^\varrho e^{-t^2y}\,dt = \frac{x^\nu}{2^{\nu+1}y^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}+s\right)}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x^2}{4y}\right)^s,$$

von der aus man durch die Annahme $\varrho = 0$ zu der weiteren Formel:

$$(7)\quad \int\limits_0^\infty J^\nu(tx)\,e^{-t^2y}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{4y}}\,J^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x^2 i}{8y}\right)e^{-\frac{x^2}{8y}-\frac{\nu\pi i}{4}}$$

gelangt, aus der man wiederum ohne Mühe die folgende herleitet:

$$(8)\quad \int\limits_0^\infty Y^0(tx)\,e^{-ty^2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{y}}\cdot H_1^0\left(\frac{x^2 i}{8y}\right)e^{-\frac{x^2}{8y}-\frac{\pi i}{2}},$$

die in etwas anderer Form von Basset[1]) aufgestellt worden ist. Die zweite Annahme $\varrho = \nu + 1$ gibt die wohlbekannte Formel:

$$(9)\quad \int\limits_0^\infty J^\nu(tx)\,e^{-t^2y}\,t^{\nu+1}\,dt = \frac{x^\nu}{(2y)^{\nu+1}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

4) Dasselbe Verfahren liefert endlich noch die Formel:

$$(10)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty J^\nu(tx)\,e^{-ty}\,t^\varrho\,dt = \dfrac{x^\nu}{y^{\nu+\varrho+1}}\cdot\dfrac{\Gamma(\nu+\varrho+1)}{2^\nu\cdot\Gamma(\nu+1)}\cdot \\ \qquad\cdot F\left(\dfrac{\nu+\varrho+1}{2},\ \dfrac{\nu+\varrho+2}{2},\ \nu+1,\ -\dfrac{x^2}{y^2}\right), \end{cases}$$

1) Citat von Gray und Matthews: Bessel Functions, p. 227; 1895.

welche von Hankel[1]) herrührt und in der man im allgemeinen:

(10a) $\Re(\varrho + \nu) > -1, \quad \Re(y \pm ix) > 0, \quad |x| < |y|$

voraussetzen muß. Aus (10) läßt sich eine große Menge von spezielleren Formeln herleiten; setzt man zum Beispiel $\varrho = \nu$, so findet man:

$$\int_0^\infty J^\nu(tx)\, e^{-ty} t^\nu dt = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2x)^\nu}{(x^2 + y^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

während die Annahme $\varrho = \nu + 1$ folgende Formel ergibt:

$$\int_0^\infty J^\nu(tx)\, e^{-ty} t^{\nu+1} dt = \frac{2\,\Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{y\,(2x)^\nu}{(y^2 + x^2)^{\nu + \frac{3}{2}}}; \tag{12}$$

letztere Formel kann man auch aus (11) herleiten, wenn man nur nach y differentiiert; ebenso ist es offenbar, daß man durch wiederholte Differentiation nach y aus derselben Formel dasjenige Integral herleiten kann, in welchem t den Exponenten $\nu + n$ hat, wo n eine positive, ganze Zahl bedeutet.

Die Formeln (11), (12) sind von Gegenbauer[2]) gefunden; der Spezialfall $\nu = 0$ von (11) war schon von Lipschitz[3]) erörtert worden, und dieses bestimmte Integral mit einer Cylinderfunktion ist wohl das erste, welches man überhaupt kennen lernte.

Setzt man ferner in (10) $\varrho = 0$, so findet man mittelst der Kummerschen Formel (F_9) die folgende:

$$\int_0^\infty J^\nu(tx)\, e^{-ty} dt = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - y)^\nu}{x^\nu \sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{13}$$

eine Formel, welche zuerst von Heine[4]) aufgestellt worden ist, während sie später Pincherle[5]) durch eine sehr elegante Methode hergeleitet hat; für $\nu = 0$ findet man aus (13) die Lipschitzsche Formel wieder. Differentiiert man endlich die Formel (13) nach ν, so erhält man für $\nu = 0$ folgende Formel:

$$\int_0^\infty Y^0(tx)\, e^{-ty} dt = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{y}{x}\right). \tag{14}$$

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 467; 1875.

2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 70 II, p, 439; 1874.

3) Journal für Mathematik Bd. 56, p. 190; 1859.

4) Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I, p. 243; 1878.

5) Memorie dell' Istituto di Bologna, serie 4ª, Bd. 8, p. 21; 1887.

§ 71. Bestimmung von $\int\limits_0^\infty e^{-yt} J^\nu(tx) t^\varrho dt$.

In gewissen Fällen kann man die allgemeinen Bedingungen § 70, (10a) etwas modifizieren und so aus (10) einige speziellere Formeln herleiten, welche uns bald sehr nützlich sein werden. Zuerst setzen wir $y = xi$, wo x als reell und positiv anzunehmen ist; die asymptotische Reihe § 59, (3) zeigt dann, daß sich für sehr große Werte von t die Funktion unter dem Integralzeichen wie $t^{\varrho - \frac{1}{2}}$ verhält, d. h. daß $\Re(\varrho) < -\frac{1}{2}$ sein muß, während die untere Integrationsgrenze die weitere Bedingung $\Re(\nu + \varrho) > -1$ erfordert. Daß die obenerwähnte Formel (10) auch hier richtig bleibt, folgt aus dem gewöhnlichen Fundamentalsatz[1]) der Theorie der analytischen Funktionen.

Wenn $y = xi$ gesetzt wird, läßt sich die hypergeometrische Reihe rechter Hand in (10) mittelst der Gaußschen Formel (F_2) summieren; man erhält so nach einer Anwendung von (Γ_3) die einfachere Formel:

$$(1)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty J^\nu(tx) e^{\mp txi} t^\varrho dt = \dfrac{\Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)\,\Gamma(-\frac{1}{2}-\varrho)}{\sqrt{\pi^3}\,(2x)^{\varrho+1}} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot\, e^{\mp\frac{\varrho+\nu+1}{2}\pi i} \cdot \sin\pi(\nu-\varrho), \end{cases}$$

welche also anwendbar ist, falls man gleichzeitig:

$$(1\text{a})\qquad x > 0, \quad \Re(\varrho+\nu) > -1, \quad \Re(\varrho) < -\tfrac{1}{2}$$

voraussetzt.

Die ähnliche Formel für die Neumannsche Cylinderfunktion läßt sich ohne Mühe mittelst der Definition derselben bilden; man findet:

$$(2)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty Y^\nu(tx)\, e^{\mp txi} t^\varrho dt = \Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)\,\Gamma(-\frac{1}{2}-\varrho) \cdot \\ \qquad \cdot\, \dfrac{e^{\mp\frac{\varrho+\nu+1}{2}\pi i}}{\sqrt{\pi^3}\,(2x)^{\varrho+1}} \Big(2\cos\nu\pi\cos\varrho\pi \pm i\sin\pi(\varrho+\nu)\Big), \end{cases}$$

wo man:

$$(2\text{a})\qquad x > 0, \quad \Re(\varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(\varrho) < -\tfrac{1}{2}$$

voraussetzen muß. Aus den Formeln (1) und (2) gewinnt man sehr leicht vier andere, in denen die Exponentialfunktion durch trigonometrische Funktionen ersetzt worden ist.

---

1) C. Neumann: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, p. 35; 1884.

Nun lassen sich auch ohne Mühe die entsprechenden Formeln bilden, welche die Hankelschen Cylinderfunktionen enthalten, nämlich:

$$(3)\qquad \int_0^{x} H_1^\nu(tx)\, e^{txi} t^\varrho t d = \frac{2\Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho+\frac{3}{2})\,(2x)^{\varrho+1}}\cdot e^{\frac{\varrho-\nu}{2}\pi i},$$

$$(4)\qquad \int_0^{\infty} H_2^\nu(tx)\, e^{-txi} t^\varrho dt = \frac{2\Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho+\frac{3}{2})\,(2x)^{\varrho+1}}\cdot e^{\frac{\nu-\varrho}{2}\pi i},$$

Formeln, die demnach bewiesen sind, falls:

$$x > 0,\quad \Re(\pm\nu) > -1,\quad \Re(\varrho) < -\tfrac{1}{2}$$

vorausgesetzt wird. Es ist indessen offenbar, daß die beiden Seiten von (3) und (4) analytische Funktionen von x darstellen müssen, falls nur:

$$(5)\qquad \Re(\varrho\pm\nu) > -1,\quad \Re(ix) > 0 \quad \text{resp. } \Re(ix) < 0$$

vorausgesetzt wird; also müssen, dem bekannten Fundamentalsatze zufolge, die Formeln (3) und (4) auch unter diesen weiteren Bedingungen gültig bleiben. Dieselben Formeln lassen sich auch ohne Schwierigkeit folgendermaßen schreiben:

$$(6)\qquad \int_0^{\infty} H_1^\nu(txi)\, e^{-tx} t^\varrho dt = \frac{2\Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho+\frac{3}{2})\,(2x)^{\varrho+1}}\, e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i},$$

$$(7)\qquad \int_0^{\infty} H_2^\nu(-txi)\, e^{-tx} t^\varrho dt = \frac{2\Gamma(\varrho+\nu+1)\,\Gamma(\varrho-\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\varrho+\frac{3}{2})\,(2x)^{\varrho+1}}\, e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i},$$

wo also $\Re(x)$ im allgemeinen positiv sein muß; die Formeln (6), (7) bestätigen vollkommen den Satz des § 4 über die Realität der Hankelschen Cylinderfunktionen.

§ 72. Bestimmung des Weberschen Fundamentalintegrales.

Mit Hankel[1]) wollen wir noch die Formel § 70, (10) mittelst der Eulerschen Formel (F_8) umformen; wir finden dann leicht:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^{\infty} J^\nu(tx)\, e^{-ty} t^\varrho dt &= \frac{\Gamma(\nu+\varrho+1)}{\Gamma(\nu+1)}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{(x^2+y^2)^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}}}\cdot \\ &\cdot F\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2},\ \frac{\nu-\varrho}{2},\ \nu+1,\ \frac{x^2}{x^2+y^2}\right); \end{aligned}\right.$$

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 468; 1875.

setzen wir nun $y = 0$, so führt die Gaußsche Formel (F_2) nach einer leichten Umformung mittelst (Γ_1) zu folgender wichtiger Formel:

(2) $$\int_0^x J^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \frac{2^\varrho}{x^{\varrho+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho+1}{2}\right)},$$

wo man also:

(2a) $$x > 0, \quad \Re(\nu+\varrho) > -1, \quad \Re(\varrho) < \tfrac{1}{2}$$

voraussetzen muß. Für ein ganzzahliges ν ist (2) von Weber[1]) gefunden worden, während schon Lipschitz[2]) den Fall $\nu = 0$ kannte.

Für die Cylinderfunktion zweiter Art ergibt die Definition derselben nach einer einfachen Rechnung folgende Formel:

(3) $$\int_0^\infty Y^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \frac{2^\varrho}{\pi x^{\varrho+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right) \sin\frac{\pi}{2}(\varrho-\nu),$$

wo man demnach:

(3a) $$x > 0, \quad \Re(\varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(\varrho) < \tfrac{1}{2}$$

voraussetzen muß. Die Formel (2) läßt sich ohne Mühe in folgender (3) sehr ähnlicher Form schreiben:

(4) $$\int_0^\infty J^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \frac{2^\varrho}{\pi x^{\varrho+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right) \cos\frac{\pi}{2}(\varrho-\nu)\cdot$$

Für den Übergang zu den Cylinderfunktionen dritter Art ist diese letzte Form der Weberschen Formel sehr bequem; man findet in der Tat aus (3) und (4) unmittelbar:

(5) $$\int_0^\infty H_1^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \frac{2^\varrho e^{\frac{\varrho-\nu}{2}\pi i}}{\pi x^{\varrho+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right),$$

(6) $$\int_0^\infty H_2^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \frac{2^\varrho e^{\frac{\nu-\varrho}{2}\pi i}}{\pi x^{\varrho+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right),$$

Formeln, die also richtig bleiben, wenn nur:

$$\Re(\varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(xi) > 0 \quad \text{resp.}\ \Re(xi) < 0,$$

---

1) Journal für Mathematik Bd. 69, p. 231; 1869. 2) Ebenda Bd. 56, p. 192; 1859.

vorausgesetzt wird; man kann dieselben Formeln auch folgendermaßen umformen:

$$(7)\qquad \int_0^\infty H_1^\nu(txi)t^\varrho\,dt = \frac{2^\varrho e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\pi x^{\varrho+1}}\cdot\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right),$$

$$(8)\qquad \int_0^\infty H_2^\nu(-txi)t^\varrho\,dt = \frac{2^\varrho e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\pi x^{\varrho+1}}\cdot\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu+1}{2}\right),$$

wo der reelle Teil von x sonach im allgemeinen als positiv vorausgesetzt werden muß.

Diese Verallgemeinerungen der Weberschen Formel werden uns bei unseren weiteren Untersuchungen über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen häufig von großem Nutzen sein.

Wir wenden uns noch einmal zu den Formeln (2) und (3); eine Differentiation nach ϱ ergibt ohne Mühe, nachdem wir $\varrho = 0$ gesetzt haben:

$$(9)\qquad \int_0^\infty J^\nu(tx)\log t\,dt = \frac{1}{x}\left(\Psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{x}\right)\right),$$

$$(10)\qquad \int_0^\infty Y^\nu(tx)\log t\,dt = \frac{\pi}{2x} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2}}{2x}\left(2\log\left(\frac{2}{x}\right)+\Psi\left(\frac{1+\nu}{2}\right)+\Psi\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\right);$$

daraus findet man für $\nu = 0$ und $x = 1$ die folgenden bemerkenswerten Formeln, wo C die Eulersche Konstante bedeutet:

$$(11)\qquad \int_0^\infty J^0(t)\log t\,dt = -(C+\log 2),$$

$$(12)\qquad \int_0^\infty Y^0(t)\log t\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Aus (3) finden wir weiterhin für $\varrho = \nu$ die interessante Formel:

$$(13)\qquad \int_0^\infty Y^\nu(tx)t^\nu\,dt = 0,$$

wo wir also:

$$x > 0, \quad \tfrac{1}{2} > \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

voraussetzen müssen.

Kapitel XIII.

Integraldarstellungen der hypergeometrischen Funktion.

§ 73. Allgemeine Formeln.

Die asymptotischen Darstellungen der Hankelschen Cylinderfunktionen zeigen unmittelbar, daß sich die in § 70 angewendete Methode ohne weiteres auf diejenigen Integrale übertragen läßt, welche wir aus denjenigen in § 70, 4) erhalten, wenn wir die dort vorkommende Exponentialfunktion durch Hankelsche Cylinderfunktionen ersetzen. Die gliedweise Integration läßt sich dann mittelst § 72, (5) und (6) ausführen, so daß diese Weberschen Integrale hier an Stelle des zweiten Eulerschen Integrales für die Gammafunktion treten.

Wir betrachten erstens das Integral:

$$\int_0^\infty H_1^\nu(ty) J^\varrho(tx) t^\sigma dt,$$

welches konvergent ist, wenn im allgemeinen:

(1) $\qquad \Re(iy \pm ix) < 0, \quad \Re(\sigma + \varrho \pm \nu) > -1$

oder im besondern:

(2) $\qquad \Re(iy \pm ix) = 0, \quad \Re(\sigma + \varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(\sigma) < 1$

vorausgesetzt wird. Wir denken uns nun, die Bedingungen (1) seien erfüllt, und führen in dem oben erwähnten Integrale statt der J-Funktion ihre Reihenentwicklung ein. Soll nun die durch die gliedweise Integration erhaltene Reihe wirklich gleichmäßig konvergieren, so muß außerdem $|x| < |y|$ sein. Unter diesen Voraussetzungen ergibt § 72, (5) unmittelbar die gesuchte Formel:

$$\int_0^\infty H_1^\nu(ty) J^\varrho(tx) t^\sigma dt = e^{\frac{\varrho+\sigma-\nu}{2}\pi i} \cdot F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right), \tag{3}$$

wo wir der Kürze halber:

$$\left\{\begin{aligned} F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{2^\sigma x^\varrho}{\pi y^{\varrho+\sigma+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho+\sigma+\nu+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\varrho+\sigma-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\varrho+1)} \cdot \\ &\cdot F\left(\frac{\varrho+\sigma+\nu+1}{2}, \frac{\varrho+\sigma-\nu+1}{2}, \varrho+1, \frac{x^2}{y^2}\right) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

gesetzt haben. Die Formel (3) ist also anwendbar, wenn die Bedingungen (1) oder (2) erfüllt sind und zudem $|x| < |y|$ ist.

Ganz auf dieselbe Weise behandelt man mittelst § 72, (6) das ähnliche Integral mit der Funktion H_2; der Wert dieses Integrales läßt sich aus (3) herleiten, wenn man nur in der Exponentialfunktion rechter Hand $-i$ für i einführt. Wir erhalten nämlich:

$$(5)\qquad \int_0^\infty H_2^\nu(ty) J^\varrho(tx) t^\sigma dt = e^{-\frac{\varrho+\sigma-\nu}{2}\pi i} \cdot F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right),$$

eine Formel, die demnach im allgemeinen anwendbar ist, falls:

$$(6)\qquad \Re(iy \pm ix) > 0, \quad \Re(\varrho + \sigma \pm \nu) > -1, \quad |x| < |y|$$

ist, oder im besondern, falls die Bedingungen (2) erfüllt sind und zudem $|x| < |y|$ ist.

Greifen wir nun auf die in § 4 gegebenen Definitionen für H_1 und H_2 zurück, so gewinnen wir aus (3) und (5) die noch allgemeineren Formeln:

$$(7)\qquad \int_0^\infty H_1^\nu(ty) H_1^\varrho(tx) t^\sigma dt = \frac{F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) - F_{\nu,-\varrho}\left(\frac{x}{y}\right)}{\sin \varrho\pi} \cdot e^{\frac{\sigma-\nu-\varrho+1}{2}\pi i},$$

$$(8)\qquad \int_0^\infty H_2^\nu(ty) H_2^\varrho(tx) t^\sigma dt = \frac{F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) - F_{\nu,-\varrho}\left(\frac{x}{y}\right)}{\sin \varrho\pi} \cdot e^{-\frac{\sigma-\nu-\varrho+1}{2}\pi i},$$

welche sonach anwendbar sind, falls im allgemeinen:

$$(9)\qquad \Re(ix + iy) \lesseqgtr 0, \quad \Re(\sigma \pm \nu \pm \varrho) > -1, \quad |x| < |y|$$

oder im besondern:

$$(10)\quad \Re(ix + iy) = 0, \quad \Re(\sigma \pm \nu \pm \varrho) > -1, \quad \Re(\sigma) < 1, \quad |x| < |y|$$

vorausgesetzt wird. Die zwei ersten Ungleichungen in der Bedingung (9) gelten natürlich beziehungsweise für die Formeln (7) und (8).

Wir bemerken, daß die Integrale, welche zwei verschiedene Hankelsche Cylinderfunktionen enthalten, viel komplizierter sind; wir bemerken ferner, daß sich die Formeln (7) und (8) offenbar gegenseitig ausschließen, so daß sie im allgemeinen nicht gleichzeitig bestehen können; dies tritt dann und nur dann ein, wenn die spezielleren Bedingungen (10) erfüllt sind.

Denken wir uns nun x und y als verschieden, so reichen die Formeln (7), (8) offenbar aus, um die hypergeometrische Funktion für alle möglichen Kombinationen endlicher Werte von x und y darzustellen. Denn man kann, falls $|x| > |y|$ angenommen wird, in diesen Formeln x mit y vertauschen, wenn man nur auch gleich-

zeitig ν mit ϱ vertauscht. Diese Vertauschungen zeigen aber deutlich, daß die Integrale linker Hand in (7) und (8) sehr eigentümliche Verhältnisse darbieten. Es ist in der Tat außer allem Zweifel, daß diese Integrale unter den Bedingungen (9) und (10) kontinuierliche Funktionen darstellen, die indessen verschieden sind, je nachdem $|x| \lesseqgtr |y|$ vorausgesetzt wird, aber identisch werden beim Grenzübergange $x = y$, falls sie dabei kontinuierlich bleiben. Wir werden später nachweisen, daß diese Integrale Verallgemeinerungen des berühmten diskontinuierlichen Faktors von Dirichlet sind.

Die Ursache der Diskontinuität der obenerwähnten Integrale ist natürlich darin zu suchen, daß die hypergeometrische Funktion in $x = 1$ eine singuläre Stelle hat.

Kehren wir nun zu den Formeln (3) und (5) zurück und setzen wir voraus, daß sie beide anwendbar sind, so finden wir durch Addition, bez. Subtraktion folgende zwei weiteren Formeln:

$$(11) \qquad \int_0^\infty J^\nu(ty) J^\varrho(tx) t^\sigma dt = F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{2}\left(\varrho + \sigma - \nu\right),$$

wo man voraussetzen muß, daß:

$$(11\text{a}) \qquad y > x > 0, \quad \Re(\nu + \varrho + \sigma) > -1, \quad \Re(\sigma) < 1$$

ist, und:

$$(12) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(ty) J^\varrho(tx) t^\sigma dt = F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{2}\left(\varrho + \sigma - \nu\right),$$

eine Formel, welche gültig ist, wenn man:

$$(12\text{a}) \qquad y > x > 0, \quad \Re(\varrho + \sigma \pm \nu) > -1, \quad \Re(\sigma) < 1$$

voraussetzt.

Denkt man sich weiterhin die Bedingungen (10) erfüllt, so führen die Formeln (7), (8) mittelst (11), (12) zu den folgenden:

$$(13) \qquad \int_0^\infty J^\nu(ty) Y^\varrho(tx) t^\sigma dt =$$

$$= \cot\varrho\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2}\left(\varrho + \sigma - \nu\right) F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu + \varrho - \sigma\right)}{\sin\varrho\pi} F_{\nu,-\varrho}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$(14) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(ty) Y^\varrho(tx) t^\sigma dt =$$

$$= \cot\varrho\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2}\left(\varrho + \sigma - \nu\right) F_{\nu,\varrho}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\sin\frac{\pi}{2}\left(\nu + \varrho - \sigma\right)}{\sin\pi\varrho} F_{\nu,-\varrho}\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo man also:

(13a) $y > x > 0, \quad \Re(\nu + \sigma \pm \varrho) > -1, \quad \Re(\sigma) < 1,$

beziehentlich:

(14a) $y > x > 0, \quad \Re(\pm \nu \pm \varrho + \sigma > -1, \quad \Re(\sigma) < 1$

annehmen muß.

Die Formeln von (11) bis (14) erlauben uns, die hypergeometrische Funktion für reelle und verschiedene Werte von x und y stets durch bestimmte Integrale darzustellen. Eben diese spezielleren Formeln lassen deutlich erkennen, weshalb der Spezialfall $y = x$ eine besondere Bedingung erfordert; denn, während die Produkte der beiden Cylinderfunktionen, welche in diesen Integralen vorkommen, für $x \neq y$ bei sehr großen Werten von t ihr Vorzeichen ebenso wechseln wie die Exponentialfunktion mit dem Exponenten $(\pm ix \pm iy)t$, kommen in dem Spezialfalle $y = x$ immer Glieder mit invariabeln Vorzeichen vor, so daß hier $\Re(\sigma) < 0$ angenommen werden muß, um die Konvergenz der Integrale an der oberen Grenze zu sichern.

Betrachten wir speziell die Formel (11) für $x = y$, so finden wir mittelst der Gaußschen Formel (F_2) folgende Formel:

(15) $$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty J^\nu(tx) J^\varrho(tx) t^\sigma dt = \\ &= \frac{2^\sigma \cdot x^{-\sigma-1} \cdot \Gamma\left(\frac{1+\nu+\varrho+\sigma}{2}\right) \Gamma(-\sigma)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\varrho-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu+\varrho-\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu+\varrho-\sigma}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

wo wir im allgemeinen:

(15a) $x > 0, \quad \Re(\nu + \varrho + \sigma) > -1, \quad \Re(\sigma) < 0$

annehmen müssen. Doch kann man die Bedingung für σ dahin modifizieren, daß man $\sigma = 0$ setzen darf, wenn zugleich $\varrho = \nu - 1 - 2n$ angenommen wird, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; die Formel (11) gibt nämlich, nachdem man zuerst (Γ_3) anwendet:

(16) $$\int_0^\infty J^\nu(t) J^{\nu-2n-1}(t) dt = \frac{(-1)^n}{2}, \quad \Re(\nu) > n.$$

Die Formeln (11) und (15) sind von Schafheitlin[1]) auf ganz andere Weise hergeleitet worden; (11) kommt jedoch schon bei Sonin[2]) vor. Später hat Gubler[3]) die Formel (11) durch Änderung des Integrationsweges diskutiert. Unsere Herleitung und die allgemeinen Formeln scheinen dagegen neu zu sein.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 30, p. 168, 169; 1887. 2) Ebenda Bd. 16, p. 51; 1880. 3) Bd. 48, p. 31—48; 1896.

§ 74. Integrale mit einer trigonometrischen Funktion.

Die Gaußschen Formeln von (F_3) bis (F_6) erlauben uns, unsere Funktion $F_{\nu,\varrho}$ in den Spezialfällen $\varrho = \pm \frac{1}{2}$, $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ unmittelbar durch elementare Funktionen auszudrücken, während uns die Kummersche Formel (F_9) gestattet, die Fälle $\nu = \frac{1}{2}$, $\varrho = \pm \frac{1}{2}$ auf ähnliche Weise zu vereinfachen. Durch Anwendung dieser Formeln erhält man eine Reihe von äußerst einfachen und interessanten Formeln, welche wir nunmehr entwickeln wollen.

Setzt man in § 73, (11) $y = 1$, $\varrho = \sigma = \frac{1}{2}$, so ergibt sich aus ($F_4$):

$$(1)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)\sin(tx)\,dt = \frac{\sin(\nu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \Re(\nu) > -2, \quad 0 < x < 1;$$

um dasselbe Integral auch für $x > 1$ zu erhalten, setzen wir in der obenerwähnten allgemeinen Formel $\nu = \sigma = \frac{1}{2}$, $x = 1$ und hinwiederum x für y und ν für ϱ; dann ergibt (F_{10}) unmittelbar:

$$(2)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)\sin(tx)\,dt = \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^\nu, \quad x>1, \quad \Re(\nu)>-2;$$

ist in dieser Formel ν gleich einer ganzen ungeraden Zahl, so verschwindet demnach das Integral linker Hand.

Die Annahmen $\varrho = -\frac{1}{2}$, $\sigma = +\frac{1}{2}$ liefern in derselben Weise die zwei analogen Formeln:

$$(3)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)\cos(tx)\,dt = \frac{\cos(\nu \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0<x<1, \quad \Re(\nu)>-1,$$

$$(4)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)\cos(tx)\,dt = \frac{-\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^\nu, \quad x>1, \quad \Re(\nu)>-1;$$

wenn ν hier eine ganze gerade Zahl bedeutet, verschwindet das letztere Integral immer.

Aus den Formeln § 73, (12) und (13) erhalten wir ebenso die zu (1) und (2) analogen Integraldarstellungen:

$$(5)\qquad \int_0^\infty Y^\nu(t)\sin(tx)\,dt = \frac{\cot\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sin(\nu \arcsin x),$$

$$0 < x < 1, \quad 2 > \Re(\nu) > -2,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \int\limits_0^\infty Y^\nu(t)\sin(tx)\,dt = \\ = \dfrac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^\nu \cot\nu\pi - \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^{-\nu}}{\sin\nu\pi}\right], \end{cases}$$

$$x > 1,\quad 2 > \Re(\nu) > -2.$$

In diesen Formeln darf ν also nur die ganzen Werte 0 und 1 annehmen; wir finden in diesen speziellen Fällen:

$$(7)\qquad \int\limits_0^\infty Y^0(t)\sin(tx)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad 0 < x < 1,$$

$$(8)\qquad \int\limits_2^\infty Y^0(t)\sin(tx)\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}},\qquad x > 1,$$

$$(9)\qquad \int\limits_0^\infty Y^1(t)\sin(tx)\,dt = 0,\qquad 0 < x < 1,$$

$$(10)\qquad \int\limits_0^\infty Y^1(t)\sin(tx)\,dt = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\qquad x > 1.$$

Geht man nun auf die Formel § 70, (14) zurück, so findet man auf ganz dieselbe Weise:

$$(11)\quad \int\limits_0^\infty Y^\nu(t)\cos(tx)\,dt = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}\cos(\nu\arcsin x),\qquad 0 < x < 1,$$

$$(12)\quad \int\limits_0^\infty Y^\nu(t)\cos(tx)\,dt = \frac{-\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\sqrt{x^2-1}}\left(\cot\nu\pi\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^\nu + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^{-\nu}}{\sin\nu\pi}\right),$$

$$x > 1,$$

wobei man noch $1 > \Re(\nu) > -1$ annehmen muß; für den einzig möglichen ganzen Wert $\nu = 0$ erhält man folgende Formeln:

$$(13)\qquad \int\limits_0^\infty Y^0(t)\cos(tx)\,dt = 0,\qquad 0 < x < 1,$$

$$(14)\qquad \int\limits_0^\infty Y^0(t)\cos(tx)\,dt = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}},\qquad x > 1.$$

Die Diskontinuität der vierzehn Integrale, welche wir hier entwickelt haben, ist offenbar. Wie sowohl die asymptotischen Ausdrücke für die Cylinderfunktionen als auch die gefundenen Werte der obenerwähnten Integrale deutlich zeigen, darf x niemals gleich 1 angenommen werden. Von diesen Formeln hat Weber[1]) (1) bis (4) für $\nu = 0$ gefunden, während die übrigen neu zu sein scheinen.

Wir kehren nun zu § 73, (11) zurück und finden für $\varrho = \frac{1}{2}$, $\sigma = -\frac{1}{2}$ die schöne Formel:

$$(15)\quad \int_0^x J^\nu(t) \cdot \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = \frac{\sin(\nu \arcsin x)}{\nu}, \quad 0 < x \leqq 1, \quad \Re(\nu) > -1,$$

während die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$, $\sigma = -\frac{1}{2}$ die entsprechende Formel:

$$(16)\quad \int_0^x J^\nu(t) \cdot \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = \frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\nu}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^\nu, \quad x > 1, \quad \Re(\nu) > -1$$

liefert; das letztere Integral verschwindet also für positive ganze gerade Werte von ν.

Setzt man ferner in § 73, (13) $\varrho = \frac{1}{2}$, $\sigma = -\frac{1}{2}$ und in § 73, (12) $\nu = \frac{1}{2}$, $\sigma = -\frac{1}{2}$, so erhält man die weiteren Formeln:

$$(17)\quad \int_0^x J^\nu(t) \cdot \frac{\cos(tx)}{t}\, dt = \frac{\cos(\nu \arcsin x)}{\nu}, \quad 0 < x \leqq 1, \quad \Re(\nu) > 0,$$

$$(18)\quad \int_0^x J^\nu(t) \cdot \frac{\cos(tx)}{t}\, dt = \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\nu}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^\nu, \quad x > 1, \quad \Re(\nu) > 0,$$

in denen das letzte Integral für ganze ungerade Werte von ν verschwinden muß.

Die Formel § 73, (14) ergibt in ähnlicher Weise:

$$(19)\quad \int_0^x Y^\nu(t) \cdot \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{2}}{\nu} \sin(\nu \arcsin x), \qquad 0 < x \leqq 1,$$

$$(20)\quad \int_0^x Y^\nu(t) \cdot \frac{\sin(tx)}{t}\, dt = \frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\nu}\left(\cot \nu\pi \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^\nu - \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-\nu}}{\sin \nu\pi}\right),$$

$$x > 1,$$

wobei man für den Parameter ν noch voraussetzen muß, daß

---

1) Journal für Mathematik Bd. 75, p. 77; 1873.

$1 > \Re(\nu) > -1$ ist. Von ganzen Werten von ν ist sonach Null der einzig mögliche; man findet in diesem Falle:

$$(21)\qquad \int_0^\infty Y^0(t)\cdot\frac{\sin(tx)}{t}\,dt = \begin{cases} 0 \quad, & 0 < x \leqq 1 \\ \log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right), & x \geqq 1. \end{cases}$$

Es ist demnach offenbar, daß die zu (17) und (18) analogen Integrale mit der Neumannschen Cylinderfunktion immer divergent sein müssen.

Die Formeln von (15) bis (18) sind von Schafheitlin[1]) gefunden worden, während Kapteyn[2]) später dieselben Formeln für ganze ν hergeleitet hat. Die Formeln von (19) bis (21) bestätigen vollständig die Vermutung von Kapteyn[3]), daß die Neumannsche Cylinderfunktion auch wirklich derartige Formeln zuläßt.

§ 75. Diskontinuierliche Faktoren von Dirichlet und Weber.

Es ist klar, daß sich die in § 73 eingeführte hypergeometrische Reihe in den beiden Fällen, in denen $\sigma = \varrho \pm \nu + 1$ vorausgesetzt wird, durch die Binomialformel summieren läßt. Wir wollen uns hier indes auf diejenigen Integrale beschränken, welche sich durch eine einzige Potenz ausdrücken lassen.

Wenn $x < 1$ und $\sigma = \varrho - \nu + 1$ angenommen wird, so ergibt sich aus § 73, (11) unmittelbar die Formel:

$$(1)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)J^\varrho(tx)t^{\varrho-\nu+1}dt = \frac{2^{\varrho-\nu+1}}{\Gamma(\nu-\varrho)}\cdot\frac{x^\varrho}{(1-x^2)^{\varrho-\nu+1}},$$
$$0 < x < 1, \qquad \Re(\varrho) > -1;$$

um nun den Fall $x > 1$ zu untersuchen, wenden wir, nachdem wir ν und ϱ, x und y vertauscht haben, wieder die Formel § 73, (11) an und finden so:

$$(2)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)J^\varrho(tx)t^{\varrho-\nu+1}dt = 0, \quad x > 1, \quad \Re(\varrho) > -1.$$

Ganz in derselben Weise liefert § 73, (12) das analoge Resultat:

$$(3)\qquad \int_0^\infty Y^\nu(t)J^\varrho(tx)t^{\varrho-\nu+1}dt = \frac{2^{\varrho-\nu+1}}{\Gamma(\nu-\varrho)}\cdot\frac{x^\varrho\cot\pi(\nu-\varrho)}{(1-x^2)^{\varrho-\nu+1}},$$
$$0 < x < 1, \quad \Re(\varrho) > -1, \quad \Re(\nu-\varrho) < 1,$$

1) Mathematische Annalen Bd. 30, p. 171, 172; 1887.

2) Archives Néerlandaises 1901, p. 114, 115. 3) loc. cit. p. 116.

während der Fall $x > 1$ eine Anwendung von § 73, (13) erfordert; man findet hier:

$$(4) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(t) J^\varrho(tx) t^{\varrho-\nu+1} dt = -\frac{2^{\varrho-\nu+1}\Gamma(\varrho-\nu+1)}{\pi} \cdot \frac{x^\varrho}{(x^2-1)^{\varrho-\nu+1}}, \quad x > 1.$$

Die andere Annahme $\sigma = \varrho + \nu + 1$ läßt sich nun ohne Mühe mit Zuhilfenahme der vorigen Formeln behandeln. Vertauscht man nämlich in diesen Formeln das Zeichen von ν und führt man weiter mittelst § 3, (3), (4) Cylinderfunktionen mit dem Parameter ν ein, so gewinnt man nach einer einfachen Rechnung folgende zwei Formelgruppen:

$$(5) \qquad \int_0^\infty J^\nu(t) J^\varrho(tx) t^{\nu+\varrho+1} dt = -\frac{\sin \varrho\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\varrho+1) 2^{\nu+\varrho+1} x^\varrho}{(1-x^2)^{\nu+\varrho+1}}, \quad 0 < x < 1,$$

$$(6) \qquad \int_0^\infty J^\nu(t) J^\varrho(tx) t^{\nu+\varrho+1} dt = -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\varrho+1) 2^{\nu+\varrho+1} x^\varrho}{(x^2-1)^{\nu+\varrho+1}}, \quad x > 1,$$

wo man noch $\Re(\nu + \varrho) > -1$ voraussetzen muß,

$$(7) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(t) J^\varrho(tx) t^{\nu+\varrho+1} dt = \frac{\cos \varrho\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\varrho+1) 2^{\nu+\varrho+1} x^\varrho}{(1-x^2)^{\nu+\varrho+1}}, \quad 0 < x < 1,$$

$$(8) \qquad \int_0^\infty Y^\nu(t) J^\varrho(tx) t^{\nu+\varrho+1} dt = -\frac{\cos \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\varrho+1) 2^{\nu+\varrho+1} x^\varrho}{(x^2-1)^{\nu+\varrho+1}}, \quad x > 1,$$

wo man noch $\Re(\varrho) > -1$ und $\Re(\nu + \varrho) > -1$ voraussetzen muß.

Setzt man in den vier letzten Formeln ν oder ϱ gleich der Hälfte einer ganzen Zahl, so verschwinden immer zwei der entsprechenden Integrale.

Die Formeln (1) und (2) sind von Schafheitlin[1]) aufgestellt worden.

Setzt man ferner in (1) und (2) $\varrho = \nu - 1$, so erhält man, unter Anwendung von § 73, (16), die merkwürdige Formel:

1) Mathematische Annalen Bd. 30, p. 172; 1887.

$$(9)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)J^{\nu-1}(tx)dt = \begin{cases} x^{\nu-1}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

man muß für sie außerdem $\Re(\nu) > 0$ annehmen. Durch die Substitution $\nu = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (9) der berühmte diskontinuierliche Faktor von Dirichlet, während $\nu = 1$ denjenigen von Weber[1]) liefert.

Wir setzen endlich in § 73, (11) $\varrho = \nu$, $\sigma = -1$ und erhalten dann die bemerkenswerte Formel:

$$(10)\qquad \int_0^\infty J^\nu(t)J^\nu(tx)\cdot\frac{dt}{t} = \begin{cases} \frac{x^\nu}{2\nu}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2\nu}, & x = 1, \\ \frac{1}{2\nu\cdot x^\nu}, & x > 1, \end{cases}$$

wobei wir jedoch $\Re(\nu) > 0$ voraussetzen müssen.

§ 76. Integraldarstellungen der Kugelfunktionen.

Die Formeln, mittelst welcher wir im Anhange die Kugelfunktionen als hypergeometrische Reihen dargestellt haben, erlauben uns, für diese Funktionen drei verschiedene Formen von einfachen Integraldarstellungen zu geben. Wir bemerken jedoch hier ein für allemal, daß unsere Integrale kein besonderes Interesse darbieten, wenn $x > 1$ angenommen wird; die entsprechenden Ausdrücke lassen sich übrigens ohne Mühe aus den allgemeinen Formeln herleiten. Wir beschränken uns daher immer auf den Fall $x \leqq 1$.

Zuerst setzen wir, der Formel (K_4) gemäß, in § 73, (11) $\nu + 2n$ für ν, $\varrho = -\frac{1}{2}$, $\sigma = \nu - \frac{1}{2}$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; eliminieren wir sodann mittelst (Γ_3) die Funktion $\cos\frac{\pi}{2}(\varrho + \sigma - \nu)$, so erhalten wir folgende Integraldarstellung:

$$(1)\qquad \int_0^\infty J^{\nu+2n}(t)\cos(tx)t^{\nu-1}dt = (-1)^n 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)K^{\nu,2n}(x),$$

wo also $-1 < x < +1$ und $\frac{3}{2} > \Re(\nu) > -n$ anzunehmen ist.

Das Integral linker Hand in (1) ist ein diskontinuierlicher Faktor, denn für $x = 1$ findet man aus § 73, (15):

1) Journal für Mathematik Bd. 75, p. 80; 1873.

$$(2) \qquad \int_0^\infty J^{\nu+2n}(t) \cos t \cdot t^{\nu-1} dt = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+2n)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})(2n)!},$$

wo man also $\frac{1}{2} \geqq \Re(\nu) > -n$ annehmen muß, weil sich die Cylinderfunktion für $\nu = \frac{1}{2}$ asymptotisch wie $(\sin t) : \sqrt{t}$ verhält; für $x > 1$ stellt das Integral (1) keine Kugelfunktion dar, es verschwindet für $\nu = \frac{1}{2}$.

Auf ähnliche Weise ergibt (K_5), wenn man in § 73, (11) $\nu + 2n + 1$ für ν, $\varrho = \frac{1}{2}$, $\sigma = \nu - \frac{1}{2}$ setzt, die analoge Integraldarstellung:

$$(3) \qquad \int_0^x J^{\nu+2n+1}(t) \sin(tx) t^{\nu-1} dt = (-1)^n 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) K^{\nu,2n+1}(x),$$

wo man sonach $-1 < x < 1$ und $\frac{3}{2} > \Re(\nu) > -n-1$ annehmen muß; für $x = 1$ erhält man:

$$(4) \qquad \int_0^x J^{\nu+2n+1}(t) \sin t \cdot t^{\nu-1} dt = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+2n+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(2n+1)!\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})},$$

$$\frac{1}{2} \geqq \Re(\nu) > -n-1;$$

für $x > 1$ stellt das Integral keine Kugelfunktion dar; auch es verschwindet für $\nu = \frac{1}{2}$.

Hankel[1]) hat für $\nu = \frac{1}{2}$ die Formeln (1) und (3) gefunden; für denselben Wert dieses Parameters gibt Schafheitlin[2]) alle vier Formeln an.

Wendet man nun die Formel (K_6) an, so muß man in § 73, (11) $\nu + 2n$ für ν, $\sigma = -\frac{1}{2}$, $\varrho = \nu - \frac{1}{2}$ setzen und gewinnt so die Formel:

$$(5) \quad \int_0^\infty J^{\nu+2n}(t) J^{\nu-\frac{1}{2}}(t\sin\theta) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(n+\frac{1}{2})(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})} K^{\nu,2n}(\cos\theta),$$

wo man $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ und $\Re(\nu) > -n$ annehmen muß; dagegen findet man:

$$(6) \qquad \int_0^\infty J^{\nu+2n}(t) J^{\nu-\frac{1}{2}}(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})};$$

für $\sin\theta > 1$ stellt das Integral (5) keine Kugelfunktion dar.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 468; 1875. 2) Ebenda Bd. 30, p. 173, 174; 1887.

Auf ähnliche Weise führt (K_7) mittelst § 73, (11) zu der analogen Integraldarstellung:

$$(7)\qquad \int_0^\infty J^{\nu+2n+1}(t)J^{\nu+\frac{1}{2}}(t\sin\theta)\frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\cdot\frac{(\sin\theta)^{\nu+\frac{1}{2}}}{\cos\theta}\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})}\cdot K^{\nu,2n+1}(\cos\theta),$$

wo, wie gewöhnlich, $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ und $\Re(\nu) > -n - \frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden muß; man findet ferner:

$$(8)\qquad \int_0^\infty J^{\nu+2n+1}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t)\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}-n)\Gamma(\nu+n+\frac{1}{2})},$$

das Integral (7) kann für $x > 1$ keine Kugelfunktion darstellen.

Um die Formel (K_8) anwenden zu können, muß man in § 73, (11) $2\nu+4n$ für ν, $\varrho = \sigma = \nu - \frac{1}{2}$ setzen; man erhält sodann:

$$(9)\qquad \int_0^\infty J^{2\nu+4n}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\Gamma(2\nu)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot K^{\nu,2n}(\cos\theta),$$

wo man also $-\pi < \theta < +\pi$ und $\frac{3}{2} > \Re(\nu) > -n$ voraussetzen muß; für $x = 1$ findet man dagegen:

$$(10)\qquad \int_0^\infty J^{2\nu+4n}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t)t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2^{-\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})},$$

$$\tfrac{1}{2} \geqq \Re(\nu) > -n;$$

für $x > 1$ stellt auch das Integral (9) keine Kugelfunktion dar; es verschwindet für $\nu = \frac{1}{2}$.

Die Formel (K_9) ergibt in ähnlicher Weise:

$$(11)\qquad \int_8^\infty J^{2\nu+4n+2}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}\left(t\sin\frac{\theta}{2}\right)t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+1)\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot K^{\nu,2n+1}(\cos\theta),$$

wo man also $-\pi < \theta < +\pi$ und $\frac{3}{2} > \Re(\nu) > -n - \frac{1}{2}$ annehmen muß; weiter findet man:

$$(12)\qquad \int_0^\infty J^{2\nu+4n+2}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t)t^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{2^{-\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})},$$

$$\tfrac{1}{2} \geqq \Re(\nu) > -n - \tfrac{1}{2},$$

während das entsprechende Integral für $x > 1$ keine Kugelfunktion darstellen kann; auch es verschwindet wieder für $\nu = \frac{1}{2}$.

Für $\nu = \frac{1}{2}$ hat Schafheitlin[1]) die vier letzten Formeln gefunden.

Offenbar müssen die ähnlichen Integrale mit der Neumannschen Cylinderfunktion entweder, außer für $n = 0$, divergent sein oder können keine Kugelfunktionen darstellen. Wir brechen daher diese Untersuchungen über diskontinuierliche Faktoren hier ab, indem wir uns vorbehalten, später in Kapitel XVIII dasselbe Problem von allgemeineren Gesichtspunkten aus zu betrachten.

Kapitel XIV.

Über die Integrale der Differentialgleichung von Malmsten.

§ 77. Erste Methode.

In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir zur Bestimmung der Werte bestimmter Integrale ausschließlich die altbekannte Methode der gliedweisen Integration unendlicher Reihen benutzt. Wir wenden uns nunmehr zu dem anderen klassischen Verfahren, zu der Herleitung der Werte solcher Integrale mittelst gewisser Differentialgleichungen. Zu diesem Zwecke beweisen wir eine Reihe von allgemeinen und bemerkenswerten Sätzen über die Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen, welche mit derjenigen Gleichung identisch oder wenigstens nahe verwandt sind, die zuerst von Malmsten[2]), später von Frobenius[3]) untersucht worden ist. Wir bemerken zugleich, daß uns diese Methode zur Herleitung bestimmter Integrale, die übrigens mit der sogenannten Laplaceschen Transformation sehr nahe verwandt ist, erlaubt, alle diejenigen Integrale von gewissen gegebenen Formen zu finden, welche Cylinderfunktionen oder sonst Lösungen gewisser gegebener linearer Differentialgleichungen überhaupt darstellen können.

Wir gehen zunächst von folgender linearen homogenen Differentialgleichung aus:

1) Mathematische Annalen Bd. 30, p. 173, 174; 1887.

2) Journal für Mathematik Bd. 39, p. 99—107; 1850. 3) Ebenda Bd. 76, p. 228—230; 1873.

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s}+\frac{b_s}{x^{s-2}}\right)g^{(n-s)}(x)=0,$$

in der die Koeffizienten a_s und b_s sämtlich von x unabhängig sein sollen. Es ist sonach offenbar, daß diese Gleichung (1) eine Verallgemeinerung derjenigen ist, welche wir früher für die Cylinderfunktionen und die Produkte zweier solcher Funktionen hergeleitet haben.

Wir nehmen nun an, die Funktion:

$$(2) \qquad g(x)=f(x)x^{\omega}$$

sei ein Integral der Gleichung (1), und betrachten folgendes bestimmte Integral:

$$(3) \qquad S=\int_0^{\infty} f(tx)t^{\varrho}(t^2+y^2)^{\sigma}dt,$$

wo x im allgemeinen eine reelle und positive Größe darstellt, während der Integrationsweg mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfällt. Offenbar kann man, wie die folgende Entwicklung zeigt, als Integrationsweg auch eine Schleife von 0 bis 0, von 0 bis ∞ oder von ∞ bis ∞ benutzen. Da wir indessen immer den Integrationsweg als reell anzunehmen haben, gehen wir auf diese Schleifen nicht näher ein. Natürlich nehmen wir weiter an, daß unser Integral wirklich die folgenden Operationen erlaubt.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen setzen wir in (3) $t'=tx$ und finden:

$$(4) \qquad S=x^{-\omega}\mathfrak{S}(xy), \quad \omega=\varrho+2\sigma+1,$$

wo $\mathfrak{S}(xy)$ eine Funktion des Argumentes (xy) bezeichnet und wo:

$$(5) \qquad \mathfrak{S}(xy)=\int_0^{\infty} g(tx)\,t^{\varrho-\omega}(t^2+y^2)^{\sigma}dt, \qquad g(t)=f(t)t^{\omega}$$

gesetzt ist. Nun ergibt aber die Gleichung (1) folgende andere Identität:

$$\sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s}+\frac{b_s t^2}{x^{s-2}}\right)\frac{\partial^{n-s}g(tx)}{\partial x^{n-s}}=0,$$

und wir erhalten somit aus (5):

$$(6) \qquad \sum_{s=0}^{s=n}\frac{a_s}{x^s}\,y^{n-s}\mathfrak{S}^{(n-s)}=-\sum_{s=0}^{s=n}\frac{b_s}{x^{s-2}}\cdot\int_0^{\infty} g^{(n-s)}(tx)\,t^{\varrho-\omega+2}(t^2+y^2)^{\sigma}dt,$$

wo die Ableitungen $\mathfrak{S}^{(r)}$ und $g^{(r)}$ in Bezug auf x zu nehmen sind.

Wendet man nun auf die Integrale rechter Hand in (6) folgende Identität:

$$t^{\varrho-\omega+2}(t^2+y^2)^{\sigma} = t^{\varrho-\omega}(t^2+y^2)^{\sigma+1} - y^2 t^{\varrho-\omega}(t^2+y^2)^{\sigma}$$

an, so erhält man weiter:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s} - \frac{b_s y^2}{x^{s-2}}\right) y^{n-s}\mathfrak{S}^{(n-s)} = \\ \qquad\qquad = -\sum\limits_{s=0}^{s=n}\frac{b_s}{x^{s-2}}\cdot\int\limits_0^x g^{(n-s)}(tx)t^{\varrho-\omega}(t^2+y^2)^{\sigma+1}dt, \end{cases}$$

so daß eine Differentiation nach y und eine darauffolgende Division durch (xy^n) den Satz ergeben:

I. *Die Funktion $\mathfrak{S}(x)$ ist ein Integral folgender in der Form mit (1) übereinstimmenden linearen homogenen Gleichung $(n+1)^{ter}$ Ordnung:*

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{A_s}{x^s} - \frac{B_s}{x^{s-2}}\right)\mathfrak{S}^{(n+1-s)}(x) = 0,$$

wobei man für die Koeffizienten A_s und B_s folgende Ausdrücke hat:

$$(9)\quad A_s = a_s + (n-s+1)a_{s-1},\quad B_s = b_s + (n-s-2\sigma+1)b_{s-1},$$

in denen die a und b mit den Indices -1 und $n+1$ natürlich gleich Null anzunehmen sind.

In dem Spezialfalle $\sigma = -1$ liefert die Formel (7) für die zugehörige $\mathfrak{S}$-Funktion die nicht homogene Gleichung:

$$(10)\quad \sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s} - \frac{b_s}{x^{s-2}}\right)\mathfrak{S}^{(n-s)}(x) = -\frac{1}{x^n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n} b_s\int\limits_0^{\infty} g^{(n-s)}(t)t^{n-s+1}dt.$$

Denkt man sich weiter, die Funktion $g(x)$ sei das Integral folgender nicht homogener Gleichung:

$$(11)\qquad \sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s} + \frac{b_s}{x^{s-2}}\right)g^{(n-s)}(x) = \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion von x bedeutet, so findet man für die entsprechende Funktion $\mathfrak{S}(x)$ die zu (8) analoge, aber nicht homogene Gleichung:

$$(12)\quad \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{A_s}{x^s} - \frac{B_s}{x^{s-2}}\right)\mathfrak{S}^{(n+1-s)}(x) = \\ \qquad\qquad = \frac{2\sigma}{x^{n-1}}\cdot\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)t^{n-2\sigma-1}(t^2+x^2)^{\sigma-1}dt, \end{cases}$$

für welche die Koeffizienten A_s und B_s aus (9) zu entnehmen sind.

Diese Resultate reichen für unsere weiteren Untersuchungen vollkommen aus; denken wir uns nun aber umgekehrt die Gleichung (8) gegeben, so erlauben uns die Formeln (9) immer, die Koeffizienten a_s und b_s mittelst A_s und B_s eindeutig zu bestimmen, vorausgesetzt, daß $A_{n+1} = 0$ ist. Wenn dies wirklich der Fall ist, so stellt auch umgekehrt das Integral (5) eine Lösung von (8) dar, falls nur $g(x)$ der so bestimmten Gleichung (1) genügt. Das bestimmte Integral (5) ermöglicht uns also, in diesem Falle den Grad der Gleichung (8) um eine Einheit zu erniedrigen. Dies ist aber für unsere Untersuchung über bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen ganz ohne Bedeutung, so daß wir in den folgenden Kapiteln auf diese Umkehrung nicht eingehen wollen.

§ 78. **Zweite Methode.**

Wir setzen auch hier voraus, daß $g(x)$ der Differentialgleichung § 77, (1) genügt und betrachten nunmehr das bestimmte Integral:

$$(1) \qquad T = \int_0^\infty f(tx) t^\varrho (t+y)^\sigma dt = x^{-\omega} \mathfrak{T}(xy), \quad \omega = \varrho + \sigma + 1,$$

wo $\mathfrak{T}(xy)$ eine Funktion des Argumentes (xy) bezeichnet, nämlich:

$$(2) \qquad \mathfrak{T}(xy) = \int_0^\infty g(tx) t^{\varrho - \omega} (t+y)^\sigma dt;$$

wenden wir hier die Identität:

$$t^{\varrho-\omega+2}(t+y)^\sigma = t^{\varrho-\omega}(t+y)^{\sigma+2} - 2y t^{\varrho-\omega}(t+y)^{\sigma+1} + y^2 t^{\varrho-\omega}(t+y)^\sigma$$

an, so finden wir folgende zu § 77, 7 analoge Gleichung:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{s=0}^{s=n} \left(\frac{a_s}{x^s} + \frac{b_s y^2}{x^{s-2}} \right) y^{n-s} \mathfrak{T}^{(n-s)} = \\ & = - \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_s}{x^{s-2}} \int_0^\infty g^{(n-s)}(tx) t^{\varrho-\omega} (t+y)^{\sigma+2} dt + \\ & + 2y \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_s}{x^{s-2}} \int_0^\infty g^{(n-s)}(tx) t^{\varrho-\omega} (t+y)^{\sigma+1} dt, \end{aligned} \right.$$

aus der sich durch eine Differentiation nach y ohne Mühe:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=n+1} \left(\frac{A_s}{x^{s-1}} + \frac{B_s y^2}{x^{s-3}} \right) y^{n-s} \mathfrak{T}^{(n-s+1)} = \\ \qquad = -\sigma \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_s}{x^{s-2}} \int_0^x g^{(n-s)}(tx) t^{n-\sigma} (t+y)^{\sigma+1} dt \end{cases}$$

ergibt, wo die Koeffizienten A_s und B_s aus § 77, (9) zu entnehmen sind. Differentiieren wir die Gleichung (4) nun wieder nach y, so erhalten wir nach einer Division durch $(x^2 y^n)$ folgenden weiteren Satz:

II. *Die Funktion $\mathfrak{T}(x)$ ist ein Integral folgender in der Form mit § 77, (1) übereinstimmender Gleichung $(n+2)^{ter}$ Ordnung:*

$$(5)\quad \sum_{s=0}^{s=n+2} \left(\frac{A_s'}{x^s} + \frac{B_s'}{x^{s-2}} \right) \mathfrak{T}^{(n+2-s)}(x) = 0,$$

wo wir der Kürze halber:

$$(6)\quad A_s' = a_s + 2(n-s+1)a_{s-1} + (n-s+1)(n-s+2)a_{s-2},$$

$$(7)\quad B_s' = b_s + 2(n-s-\sigma+2)b_{s-1} + (n-s-\sigma+2)(n-s-\sigma+3)b_{s-2}$$

gesetzt haben, wobei die Koeffizienten a_s und b_s mit den Indices -2, -1, $n+1$ und $n+2$ natürlich gleich Null zu setzen sind.

Der Spezialfall $\sigma = -1$ ergibt die zu § 77, (10) analoge Gleichung:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=n} \left(\frac{a_s}{x^s} + \frac{b_s}{x^{s-2}} \right) \mathfrak{T}^{(n-s)}(x) = \\ \qquad = -\frac{1}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} b_s \int_0^\infty g^{(n-s)}(t) t^{n-s+1} dt + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} b_s \int_0^\infty g^{(n-s)}(t) t^{n-s} dt, \end{cases}$$

während die nicht homogene Gleichung § 77, (11) für die zugehörige Funktion $\mathfrak{T}(x)$ die nicht homogene Gleichung:

$$(9)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=n+2} \left(\frac{A_s'}{x_s} + \frac{B_s'}{x^{s-2}} \right) \mathfrak{T}^{(n+2-s)}(x) = \\ \qquad = \frac{\sigma(\sigma-1)}{x^n} \cdot \int_0^\infty \varphi(t) t^{n-\sigma-1} (t+x)^{\sigma-2} dt \end{cases}$$

liefert.

§ 79. **Dritte Methode.**

Als Verallgemeinerung der Differentialgleichungen für $C^\nu(\sqrt{x})$, $e^{-ix}C^\nu(x)$ und $C^\nu(\sqrt{x})\,C^\varrho(\sqrt{x})$ betrachten wir jetzt folgende homogene lineare Gleichung:

(1) $$\sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s}+\frac{b_s}{x^{s-1}}\right)g^{(n-s)}(x)=0.$$

Setzen wir auch hier:

(2) $$g(x)=f(x)x^{\omega},$$

so gelangen wir für das bestimmte Integral:

(3) $$U=\int_0^\infty f(tx)t^{\varrho}(t+y)^{\sigma}dt$$

zu der Identität:

(4) $$U=x^{-\omega}\mathfrak{U}(xy),\quad \omega=\varrho+\sigma+1,$$

wo $\mathfrak{U}(xy)$ eine Funktion des Argumentes (xy) ist und also:

(5) $$\mathfrak{U}(xy)=\int_0^\infty g(tx)t^{\varrho-\omega}(t+y)^{\sigma}dt$$

zu setzen ist; das gewöhnliche Verfahren führt uns leicht zu dem folgenden dritten Satze:

III. *Die Funktion $\mathfrak{U}(x)$ ist ein Integral folgender in der Form mit (1) übereinstimmender homogenen linearen Differentialgleichung $(n+1)^{ter}$ Ordnung:*

(6) $$\sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{A_s}{x^s}-\frac{B_s}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{U}^{(n+1-s)}(x)=0,$$

wo wir der Kürze halber:

(7) $$A_s=a_s+(n-s+1)a_{s-1},\quad B_s=b_s+(n-s-\sigma+1)b_{s-1}$$

gesetzt haben, während a_s und b_s mit den Indices -1 und $n+1$ gleich Null anzunehmen sind.

Der Spezialfall $\sigma=-1$ ergibt hier für die entsprechende Funktion $\mathfrak{U}(x)$ die nicht homogene Gleichung von derselben Form wie (1):

(8) $$\sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s}-\frac{b_s}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{U}^{(n-s)}(x)=-\frac{1}{x^n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}b_s\int_0^\infty g^{(n-s)}(t)\,t^{n-s}dt,$$

während die nicht homogene Gleichung:

(9) $$\sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s}+\frac{b_s}{x^{s-1}}\right)g^{(n-s)}(x)=\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine gegebene Funktion bedeutet, für die zugehörige Funktion $\mathfrak{U}(x)$ folgende zu (6) analoge, aber nicht homogene Differentialgleichung liefert:

$$(10)\quad \sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{A_s}{x^s}-\frac{B_s}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{U}^{(n+1-s)}(x)=\frac{\sigma}{x^n}\cdot\int_0^\infty \varphi(t)t^{n-\sigma-1}(t+x)^{\sigma-1}dt,$$

wo die Koeffizienten A_s und B_s aus (7) zu entnehmen sind.

§ 80. Vierte und fünfte Methode.

Der Satz II führt uns ganz natürlich dazu, folgendes die Funktion § 79, (2) enthaltende Integral:

$$\int_0^\infty f(tx)t^{\varrho}(t^2+y^2)^{\sigma}dt$$

zu untersuchen; es scheint im allgemeinen allerdings nicht eben die Eigenschaften zu besitzen wie die vorigen Integrale, so daß wir es vorziehen, statt seiner das andere Integral:

$$(1)\qquad V=\int_0^\infty e^{-\frac{y}{t}}f(tx)\,t^{\omega-1}dt$$

in Betracht zu ziehen. Wir finden, wie gewöhnlich, die Formel:

$$(2)\qquad V=x^{-\omega}\mathfrak{B}(xy),$$

wo $\mathfrak{B}(xy)$ eine Funktion des Produktes (xy) ist, so daß also:

$$(3)\qquad \mathfrak{B}(xy)=\int_0^\infty e^{-\frac{y}{t}}g(tx)\cdot\frac{dt}{t}$$

sein muß. Die gewöhnliche Methode führt nun ohne Mühe zu dem vierten Satze:

IV. *Die Funktion $\mathfrak{B}(x)$ ist ein Integral folgender in der Form mit* § 79, (1) *übereinstimmender linearen homogenen Gleichung $(n+1)^{ter}$ Ordnung:*

$$(4)\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{a_s+(n-s+1)a_{s-1}}{x^s}-\frac{b_{s-1}}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{B}^{(n+1-s)}(x)=0,$$

wo die Koeffizienten a_s und b_s mit den Indices -1 und $n+1$ gleich Null zu setzen sind.

Es ist offenbar, daß der in jedem der drei vorhergehenden Paragraphen erörterte Spezialfall $\sigma = -1$ hier kein Analogon findet. Gehen wir aber von der nicht homogenen Gleichung § 79, (9) aus, so finden wir für die entsprechende Funktion $\mathfrak{V}(x)$ folgende zu (4) analoge, aber nicht homogene Gleichung:

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{a_s + (n-s+1)a_{s-1}}{x^s} - \frac{b_{s-1}}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{V}^{(n+1-s)}(x) = \\ \displaystyle\qquad\qquad = \frac{1}{x^n}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)t^{n-1}dt. \end{cases}$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch das weitere die Funktion § 79, (2) enthaltende Integral:

$$(6)\qquad W = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{y}} f(tx)t^{\omega-1}dt$$

betrachten. Wir erhalten hier:

$$(7)\qquad W = x^{-\omega}\mathfrak{W}(xy),$$

wo sich die Funktion $\mathfrak{W}(xy)$ des Produktes (xy) folgendermaßen darstellen läßt:

$$(8)\qquad \mathfrak{W}(xy) = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{y}} g(tx)\cdot\frac{dt}{t};$$

dieselbe Methode wie vorher ergibt so den folgenden fünften Satz:

V. *Die Funktion $\mathfrak{W}(x)$ ist ein Integral folgender in der Form mit § 79, (1) übereinstimmender linearen homogenen Differentialgleichung $(n+1)^{ter}$ Ordnung:*

$$(9)\qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}\left(\frac{a_{s-1}}{x^s} + \frac{(n-s+1)b_{s-1} + b_s}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{W}^{(n+1-s)}(x) = 0,$$

wo die Koeffizienten a_s und b_s mit den Indices -1 und $n+1$ wegzulassen sind. Wenn aber $b_s = 0$ ist, so finden wir folgende Gleichung n^{ter} Ordnung:

$$(10)\qquad \sum_{s=0}^{s=n}\left(\frac{a_s}{x^s} + \frac{(n-s)b_s + b_{s+1}}{x^{s-1}}\right)\mathfrak{W}^{(n-s)}(x) = 0.$$

Von dieser Methode, welche ja mit einem Spezialfalle der Laplaceschen Transformation zusammenfällt, machen wir in den folgenden Untersuchungen keinen Gebrauch. Wir bemerken nur vorübergehend, daß sich die Formeln § 70, (2), (3) nach dieser Methode herleiten lassen.

Kapitel XV.

Anwendungen der ersten Methode.

§ 81. Über das Integral $\int_0^\infty C^\nu(tx) t^\varrho (t^2+y^2)^\sigma dt$.

Als erstes Beispiel für die Theorien des vorigen Kapitels betrachten wir hier das Integral:

$$(1) \qquad \mathfrak{S}(xy) = \int_0^\infty C^\nu(tx)(tx)^\omega t^{\varrho-\omega}(t^2+y^2)^\sigma dt, \qquad \omega = \varrho + 2\sigma + 1,$$

wo $C^\nu(t)$ eine willkürliche Cylinderfunktion mit dem Argumente t und dem Parameter ν bezeichnet. Eine *formale* Anwendung des Satzes § 77, I liefert mittelst § 50, (16) die homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(2) \quad \mathfrak{S}^{(3)}(x) + \frac{3-2\omega}{x}\mathfrak{S}^{(2)}(x) + \left(\frac{(\omega-1)^2-\nu^2}{x^2} - 1\right)\mathfrak{S}^{(1)}(x) + \frac{2\sigma}{x}\mathfrak{S}(x) = 0.$$

Die formale Herleitung dieser Gleichung und der daraus folgende Ausdruck für das Integral $\mathfrak{S}(xy)$ bedürfen indessen weiterer Überlegung. In der Tat erfordert ja die Herleitung der Gleichung (2) erstens Differentiationen unter dem Integralzeichen in (1) und zwar zweimal nach x und einmal nach y. Wenn nun die betreffende Cylinderfunktion nicht eine Hankelsche ist, darf x nur als reell angenommen werden; nehmen wir nun aber an, daß:

$$(3) \qquad \Re(\varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(\varrho + 2\sigma) < -\tfrac{1}{2}$$

ist, so muß das Integral $\mathfrak{S}(xy)$, dem asymptotischen Werte der Cylinderfunktionen gemäß, unbedingt konvergent sein. Die zweimalige Differentiation nach x unter dem Integralzeichen ist also erlaubt; denn jede Differentiation gibt ja nur wieder Cylinderfunktionen, die allerdings mit t multipliziert sind, und somit müssen auch die zwei Derivierten nach x unbedingt konvergente Integrale sein. Die nachfolgende Differentiation nach y kann aber die Konvergenz des betreffenden Integrales nur verstärken; also ist die Gleichung (2) jedenfalls unter den Bedingungen (3) gültig, und somit finden wir für das Integral (1) einen Ausdruck von folgender Form:

$$(4) \qquad \mathfrak{S}(xy) = c_1 f_1(xy) + c_2 f_2(xy) + c_3 f_3(xy),$$

wo $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ voneinander linear unabhängige partikuläre

Integrale der Differentialgleichung (2) bedeuten und die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 sowohl von x als auch von y unabhängig sein müssen.

Weiter ist offenbar, daß die Gleichung (2) nur die zwei singulären Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ haben kann, so daß die drei Integrale $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ für willkürliche endliche Werte von ν, ϱ und σ in der ganzen x-Ebene mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = \infty$ analytische Funktionen sein müssen. Fassen wir also drei der vier Variabeln x, ν, ϱ und σ als gegebene feste Konstanten auf, so sind die drei partikulären Integrale demnach immer analytische Funktionen der vierten Variabeln.

Nun ist das Integral (1) offenbar konvergent, falls:

$$(5) \qquad \Re(\varrho \pm \nu) > -1, \quad \Re(\varrho + 2\sigma) < \tfrac{1}{2}$$

vorausgesetzt wird. Gibt man also ϱ und ν ganz willkürliche, aber endliche und feste Werte, welche der ersten Bedingung (5) genügen, so bestimmt die zweite dieser Bedingungen offenbar eine Halbebene E, in welche σ fallen muß, um das Integral konvergent zu machen, und es leuchtet ein, daß die Konvergenz des Integrales dann eine *gleichmäßige* sein muß; die Integrale, welche man aus (1) durch wiederholte Differentiation nach σ herleiten kann, haben offenbar alle dieselbe Eigenschaft.

Teilt man nun das Integrationsintervall in unendlich viele endliche Stücke, so wird das ursprüngliche Integral $\mathfrak{S}(xy)$ als Summe einer unendlichen Reihe dargestellt. Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind analytische Funktionen von σ, während die Reihe selbst und diejenigen anderen Reihen, welche man daraus durch gliedweise Differentiationen nach σ herleiten kann, sämtlich in der Halbebene E *gleichmäßig* konvergent sind. Einem bekannten Satze[1]) zufolge sind also die Summen dieser neuen Reihen genau die nach σ genommenen Ableitungen des Integrales $\mathfrak{S}(xy)$.

Da nun $\mathfrak{S}(xy)$ als Funktion von σ betrachtet, eindeutig und stetig und zudem willkürlich oft differentiierbar ist, und da diese Ableitungen von der Richtung, in welcher sie genommen werden, unabhängig sind, so ist $\mathfrak{S}(xy)$ eine analytische Funktion von σ, falls nur die Bedingungen (5) erfüllt sind.

Denkt man sich also die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 in (4) den Bedingungen (3) entsprechend bestimmt, Bedingungen, welche jedenfalls die Existenz der Formel (4) sichern, so müssen diese Koeffizienten ja analytische Funktionen von σ darstellen, und daher

1) U. Dini: Grundlagen etc. p. 524; Leipzig 1892.

muß, einem Fundamentalsatze[1]) der Theorie der analytischen Funktionen zufolge, auch die Formel (4) unter den weiteren Bedingungen (5) gültig bleiben.

Wir haben hier die Herleitung der Formel (4) so ausführlich besprochen, damit wir späterhin die ganz ähnlichen Entwicklungen weglassen dürfen.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen haben wir nun über die drei Parameter ν, ϱ und σ so zu verfügen, daß sich das Integral $\mathfrak{S}(xy)$ durch Cylinderfunktionen oder Lommelsche Funktionen ausdrücken läßt.

Wir vergleichen zuerst (2) mit § 55, (7) für $x^{\alpha} C^{\gamma}(\beta x) C_1^{\gamma}(\beta x)$ und finden, daß diese zwei Gleichungen dann und nur dann identisch sein können, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\omega = \frac{3}{2}\alpha, \quad \beta = \frac{i}{2}, \quad \nu^2 = 4\gamma^2 - \frac{3}{4}\alpha^2, \quad \sigma = \frac{\alpha - 1}{2}, \quad \alpha(4\gamma^2 - \alpha^2) = 0,$$

so daß wir folgende zwei Fälle näher zu untersuchen haben:

1) $\alpha = \varrho = \omega = 0, \quad \nu = 2\gamma, \quad \sigma = -\frac{1}{2},$

2) $\nu = \varrho = \gamma, \quad \alpha = 2\gamma, \quad \omega = 3\gamma, \quad \sigma = \gamma - \frac{1}{2}.$

Zweitens vergleichen wir (2) mit § 50, (17); beide Gleichungen sind identisch, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$1 - 2\alpha + a = 3 - 2\omega, \quad \beta = i, \quad a = -2\sigma,$$
$$\alpha^2 - \gamma^2 + (a-1)(1-2\alpha) = (\omega - 1)^2 - \nu^2,$$
$$(a-2)(\alpha^2 - \gamma^2) = 0,$$

so daß wir die zwei weiteren Fälle zu untersuchen haben:

3) $a = 2, \quad \sigma = -1, \quad \alpha = \omega, \quad \gamma = \nu, \quad \delta = -\omega,$ ϱ willkürlich,

4) $\alpha = \gamma = \nu + \sigma + 1, \quad \omega = \gamma + \sigma + 1, \quad \varrho = \nu + 1, \quad \delta = 1 - \nu + \sigma,$ σ willkürlich.

§ 82. Erster Fall: Integraldarstellungen für $C^{\nu}(x) C_1^{\nu}(x)$.

Beim ersten Spezialfalle betrachten wir zunächst das Integral, in welchem die Cylinderfunktion von der ersten Art ist, und finden so eine Formel von der Form:

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{J^{2\nu}(2tx)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt = c_1 \left(J^{\nu}(xyi)\right)^2 + c_2 J^{\nu}(xyi) Y^{\nu}(xyi) + c_3 \left(Y^{\nu}(xyi)\right)^2,$$

1) C. Neumann: Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, p. 35; Leipzig 1884.

eine Formel, welche gültig ist, solange $x > 0$ und $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt wird, oder spezieller, solange $x = 0$, $\Re(\nu) > 0$ oder endlich $y = 0$, $\Re(\nu) > 0$ ist. Um die drei Koeffizienten zu bestimmen, setzen wir erstens $y = 0$; dann wird das letzte Glied rechter Hand unendlich, also muß $c_3 = 0$ sein; wenden wir nun weiter die Webersche Formel § 72, (2) an, so finden wir:

$$c_2 = -\frac{\pi}{2};$$

um auch c_1 zu bestimmen, multiplizieren wir in (1) mit $x^{-2\nu}$ und setzen danach $x = 0$, so daß die Formel (Γ_{18}) unmittelbar folgende Gleichung gibt:

$$c_1 \sin \nu\pi + c_2 \cos \nu\pi = -\frac{\pi}{2} e^{-\nu\pi i},$$

und somit haben wir die elegante Formel:

$$(2) \qquad \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{J^{2\nu}(2tx)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt = i\left(J^\nu(xyi)\right)^2 - J^\nu(xyi)\, Y^\nu(xyi)$$

gefunden, in der wir im allgemeinen $x > 0$, $y \neq 0$, $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ oder spezieller $x = 0$, $\Re(\nu) > 0$ oder $y = 0$, $\Re(\nu) > 0$ voraussetzen müssen.

Ändert man nun in (2) das Vorzeichen von ν und führt man linker Hand mittelst der Definition § 3, (2) die Funktion $Y^{2\nu}(x)$ ein, während man rechter Hand mit Zuhilfenahme von § 3, (3), (4) wieder Cylinderfunktionen mit dem Parameter ν einführt, so findet man die weitere Formel:

$$(3) \qquad \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{Y^{2\nu}(2tx)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt = \left(H_1^\nu(xyi)\right)^2 - i \operatorname{tg} \nu\pi\, H_1^\nu(xyi)\, H_2^\nu(xyi),$$

wo man also $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ voraussetzen muß, während y nicht gleich Null angenommen werden darf; die Null ist also der einzig mögliche ganze Wert von ν; die entsprechende Formel (3) wird dann sehr elegant.

Wir setzen nun weiter in (2) $-yi$ für y und denken uns für einen Augenblick x und y reell und positiv, während wir das Integrationsintervall in zwei andere, nämlich von $t = 0$ bis $t = y$ und von $t = y$ bis $t = \infty$, teilen. Setzen wir in der so erhaltenen Formel (2) die reellen und die imaginären Komponenten der beiden Seiten einander gleich, so finden wir folgende zwei Formeln:

$$(4)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2\nu}(2x\cos\varphi)\,d\varphi = \left(J^\nu(x)\right)^2, \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}, \quad x \text{ willkürlich},$$

$$(5)\quad \frac{2}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{J^{2\nu}(2tx)\,dt}{\sqrt{t^2-y^2}} = -J^\nu(xy)\,Y^\nu(xy), \quad x > 0, \quad \nu \text{ willkürlich}.$$

Die Formel (4) läßt sich auch sehr leicht durch gliedweise Integration direkt herleiten; sie ist übrigens eine neue Verallgemeinerung der in § 22 erwähnten Formel von Neumann[1]), welche man aus (4) findet, wenn ν eine ganze Zahl bedeutet.

In (5) darf y auch als komplex angenommen werden, wenn nur die sehr entfernten Teile des Integrationsweges mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfallen.

Die Definition der Neumannschen Cylinderfunktion gibt weiter ohne Mühe mittelst (4) die analoge Formel:

$$(6)\quad \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y^{2\nu}(2x\cos\varphi)\,d\varphi = 2J^\nu(x)\,Y^\nu(x) - \operatorname{tg}\nu\pi\, H_1^\nu(x)\,H_2^\nu(x),$$

wo x eine willkürliche endliche Größe bezeichnet, während

$$\tfrac{1}{2} > \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

sein muß. Durch diese Formel findet man wieder aus (3), wenn man dort $-yi$ für y setzt, die weitere Formel:

$$(7)\qquad \frac{4}{\pi}\int_y^{\infty} \frac{Y^{2\nu}(2tx)\,dt}{\sqrt{t^2-y^2}} = \left(J^\nu(xy)\right)^2 - \left(Y^\nu(xy)\right)^2,$$

wo die Bedingungen dieselben sind wie in (5).

Führt man endlich die Hankelschen Cylinderfunktionen ein, so findet man aus (5) und (7) folgende Formeln:

$$(8)\qquad -\frac{4i}{\pi}\cdot\int_y^{\infty} \frac{H_1^{2\nu}(2tx)\,dt}{\sqrt{t^2-y^2}} = \left(H_1^\nu(xy)\right)^2, \quad \Re(xi) \geqq 0,$$

$$(9)\qquad \frac{4i}{\pi}\cdot\int_y^{\infty} \frac{H_1^{2\nu}(2tx)\,dt}{\sqrt{t^2-y^2}} = \left(H_2^\nu(xy)\right)^2, \quad \Re(xi) \leqq 0.$$

---

1) Theorie der Besselschen Funktionen, p. 70; 1867.

In den zwei letzten Formeln ist es nicht notwendig, daß der Integrationsweg mit der Achse der positiven Zahlen zusammenfällt; nur muß für die sehr entfernten Teile dieses Weges $\Re(txi) \geqq 0$, bez. $\Re(txi) \leqq 0$ angenommen werden.

§ 83. Zweiter Fall: Weitere Integralausdrücke für $C^\nu(x) C_1^\nu(x)$.

In dem zweiten Falle des § 81 findet man eine Formel von folgender Form:

$$(1)\quad \begin{cases} \int_0^\infty C^\nu(2tx)(t^2+y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^\nu dt = \\ = \frac{y^{2\nu}}{x^\nu}\left(c_1\left(J^\nu(xyi)\right)^2 + c_2 J^\nu(xyi)\, Y^\nu(xyi) + c_3\left(Y^\nu(xyi)\right)^2\right), \end{cases}$$

wo man im allgemeinen $x > 0$ und $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ voraussetzen muß. Wenn die willkürliche Cylinderfunktion unter der Form:

$$C^\nu(x) = aJ^\nu(x) + b\,Y^\nu(x)$$

gegeben ist, suchen wir nunmehr die drei in (1) vorkommenden Koeffizienten zu bestimmen; erstens setzen wir $y = 0$, so daß vorläufig $\Re(\nu) > 0$ sein muß. Die Weberschen Formeln § 72, (3), (4) ergeben dann ohne weiteres:

$$(2)\qquad c_3 = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{4}(a\sin\nu\pi - b\cos\nu\pi)\,e^{\nu\pi i},$$

eine Formel, die also überall gültig bleibt, wo das Integral (1) überhaupt einen Sinn hat; dasselbe gilt von der andern Gleichung:

$$(3)\quad \begin{cases} c_1\sin^2\nu\pi + c_2\sin\nu\pi\cos\nu\pi + c_3\cos^2\nu\pi = \\ \qquad = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{4}(a\sin\nu\pi + b\cos\nu\pi)\,e^{-\nu\pi i}, \end{cases}$$

welche man durch Anwendung von (Γ_{18}) aus (1) findet, nachdem man durch x^ν dividiert und dann $x = 0$ gesetzt hat; man muß also hier einstweilen $\Re(\nu) < 0$ annehmen.

Um eine dritte Gleichung zwischen den Koeffizienten zu finden, dividiert man die Gleichung (1) durch $y^{2\nu-1}$ und setzt dann $y = +\infty$; die linke Seite von (1) behält dann einen endlichen Wert, falls $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen wird; führt man aber rechter Hand die Ausdrücke (3), (4) des § 59 ein, so muß die Exponentialfunktion e^{xy} wegfallen, und man findet schließlich nach einer Anwendung der Weberschen Fundamentalformeln des § 72 folgende zwei Formeln:

(4) $$c_3 - c_1 = i c_2,$$

(5) $$c_1 + c_3 = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{a i}{2}.$$

Die Formeln (2), (4) und (5) gestatten nun eine Bestimmung der drei Koeffizienten, während (3) eine Kontrolle der gefundenen Werte ermöglicht; man findet so endlich die Formel:

(6) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty C^\nu(2tx)\,(t^2+y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,t^\nu\,dt = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})(iy)^{2\nu}}{4x^\nu}\Big(A\big(J^\nu(xyi)\big)^2 + BJ^\nu(xyi)\,Y^\nu(xyi) + C\big(Y^\nu(xyi)\big)^2\Big), \end{aligned}\right.$$

wo $x > 0$ und $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ sein muß, und wo wir der Kürze halber:

(7) $$\left\{\begin{aligned} A &= b \cos \nu\pi + a \sin \nu\pi + 2ai \cos \nu\pi, \\ B &= 2bi \cos \nu\pi - 2a \cos \nu\pi, \\ C &= a \sin \nu\pi - b \cos \nu\pi \end{aligned}\right.$$

gesetzt haben.

Setzen wir nun in (6) $-iy$ für y und denken wir uns x und y positiv und ν reell, so finden wir durch Teilung des Integrationsintervalles in zwei andere, nämlich von $t = 0$ bis $t = y$ und von $t = y$ bis $t = \infty$, und durch Identifizierung der reellen und der imaginären Komponenten folgende zwei Formeln:

(8) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} C^\nu(2x \cos\varphi)\,(\cos\varphi \sin\varphi)^\nu\,d\varphi = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2x^\nu}\Big(a\big(J^\nu(x)\big)^2 + b\,J^\nu(x)\,Y^\nu(x)\Big), \end{aligned}\right.$$

wo $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden muß, und:

(9) $$\left\{\begin{aligned} &\int_y^\infty C^\nu(2tx)\,(t^2-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,t^\nu\,dt = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})y^{2\nu}}{4x^\nu}\Big(A_1\big(J^\nu(xy)\big)^2 + B_1 J^\nu(xy)\,Y^\nu(xy) + C_1\big(Y^\nu(xy)\big)^2\Big), \end{aligned}\right.$$

wo wir der Kürze halber:

(10) $$\left\{\begin{aligned} &A_1 = b \cos \nu\pi - a \sin \nu\pi, \quad B_1 = -2(b \sin \nu\pi + a \cos \nu\pi), \\ &C_1 = a \sin \nu\pi - b \cos \nu\pi \end{aligned}\right.$$

gesetzt haben; hier muß $x > 0$ und $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen werden.

Aus (9) findet man weiterhin für die Hankelschen Cylinderfunktionen folgende zwei eleganten Formeln:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_y^\infty H_1^\nu(2tx)(t^2-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}t^\nu dt = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,e^{(\nu+\frac{1}{2})\pi i}\,y^{2\nu}}{4x^\nu}\left(H_1^\nu(xy)\right)^2,\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_y^\infty H_2^\nu(2tx)(t^2-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}t^\nu dt = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,e^{-(\nu+\frac{1}{2})\pi i}\,y^{2\nu}}{4x^\nu}\left(H_2^\nu(xy)\right)^2,\end{aligned}\right.$$

wo man im allgemeinen $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ und $\Re(xi) > 0$, bez. $\Re(xi) < 0$ voraussetzen muß; in dem Spezialfalle $\Re(xi) = 0$ muß noch $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen werden.

Die Formeln (11) und (12) erlauben uns noch eine ganze Reihe von neuen, zu den vorigen analogen Formeln zu entwickeln. Zu diesem Zwecke setzen wir in (11), (12) $-\nu$ für ν und reduzieren mittelst § 4, (2) die Cylinderfunktionen mit dem Parameter $-\nu$; auf diese Weise finden wir:

$$(13)\quad \int_y^\infty \frac{H_1^\nu(2tx)\,dt}{t^\nu(t^2-y^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\,x^\nu\cdot i}{2y^{2\nu}}\left(H_1^\nu(xy)\right)^2,$$

$$(14)\quad \int_y^\infty \frac{H_2^\nu(2tx)\,dt}{t^\nu(t^2-y^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)\,x^\nu}{2y^{2\nu}\cdot i}\left(H_2^\nu(xy)\right)^2,$$

wo wir $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$ und $\Re(xi) > 0$, bez. $\Re(xi) < 0$ voraussetzen müssen; in dem Spezialfalle $\Re(xi) = 0$ muß $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen werden. Durch Addition, bez. Subtraktion der Formeln (13), (14) findet man zwei zu (9) analoge Formeln.

§ 84. Dritter Fall: Integralausdrücke für $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$.

Beim dritten Falle beschränken wir uns auf die Untersuchung des Integrales mit einer Cylinderfunktion der ersten Art und finden eine Formel von folgender Form:

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\,t^\varrho}{t^2+y^2}\,dt = y^{\varrho-1}\left(c_1 J^\nu(xyi) + c_2 Y^\nu(xyi) + c_3 \Pi^{\nu,1-\varrho}(xyi)\right),$$

wo $x > 0$, $\Re(\nu + \varrho) > -1$, $\Re(\varrho) < \frac{3}{2}$ sein muß, während y nicht rein imaginär angenommen werden darf.

Setzt man in (1) $y = 0$, so muß man für den Augenblick $\Re(\nu + \varrho) > 1$ voraussetzen, und c_3 läßt sich unmittelbar mittelst der Weberschen Formel § 72, (2) bestimmen. Dividiert man ferner mit x^ν in (1) und setzt man $x = 0$, so muß man einstweilen $-1 < \Re(\nu + \varrho) < 1$ annehmen, und somit bestimmt (Γ_{18}) c_1, während c_2 verschwinden muß; um dies einzusehen, braucht man nur $\Re(\nu) > 0$ anzunehmen. Man findet so die Formel:

$$
(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^\varrho}{t^2 + y^2}\, dt = \\ &= \frac{\pi\, (iy)^{\varrho - 1}}{\sin \nu(\pi + \varrho)} \left(i^{1-\nu-\varrho} \sin \frac{\pi}{2}(\nu + \varrho) J^\nu(xyi) - \Pi^{\nu, 1-\varrho}(xyi) \right). \end{aligned} \right.
$$

In dem Spezialfalle, in welchem $\varrho + \nu$ eine ganze ungerade Zahl bedeutet, stellt sich der Ausdruck rechter Hand in (2) unter unbestimmter Form dar, läßt sich aber unmittelbar durch die gewöhnlichen Methoden bestimmen. Setzt man noch spezieller $\nu = 2n$, $\varrho = 1$, bez. $\nu = 2n + 1$, $\varrho = 0$, so findet man mittelst § 17, (26):

$$
(3) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2n}(tx)\, t\, dt}{t^2 + y^2} = \frac{i}{2} \left(\pi H_1^{2n}(xyi) + i S^{2n}(xyi) \right),
$$

$$
(4) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2n+1}(tx)\, dt}{t^2 + y^2} = \frac{1}{2y} \left(\pi H_1^{2n+1}(xyi) + i S^{2n+1}(xyi) \right).
$$

Setzt man dagegen $\nu = 2n$, $\varrho = 0$, bez. $\nu = 2n + 1$, $\varrho = 1$, so erhält man mittelst § 17, (25):

$$
(5) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2n}(tx)\, dt}{t^2 + y^2} = \frac{\pi}{2y} \left(J^{2n}(xyi) + i\, \Omega^{2n}(xyi) \right),
$$

$$
(6) \quad \int_0^\infty \frac{J^{2n+1}(tx)\, t\, dt}{t^2 + y^2} = \frac{\pi i}{2} \left(J^{2n+1}(xyi) + i\, \Omega^{2n+1}(xyi) \right).
$$

Wir setzen ferner in (2) $\varrho = \nu + 2n + 1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und finden dann die Formel:

$$
(7) \quad \frac{2}{\pi i} \cdot \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^{\nu + 2n + 1}}{t^2 + y^2}\, dt = (iy)^{\nu + 2n} H_1^\nu(xyi),
$$

wo man $-2n + \frac{3}{2} > \Re(\nu) > -n - 1$ voraussetzen muß, so daß n nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen darf.

§ 85. Vierter Fall: Verallgemeinerung eines Integrales von Sonin.

Eine einfache Änderung der Bezeichnungen des vierten Falles in § 81 erlaubt uns die entsprechende Formel folgendermaßen zu schreiben:

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^\nu(tx)\, t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\varrho+1}}\, dt = \\ = x^\varrho y^{\nu-\varrho}\Big(c_1 J^{\nu-\varrho}(xyi) + c_2 Y^{\nu-\varrho}(xyi) + c_3 \Pi^{\nu-\varrho,-\nu-\varrho}(xyi)\Big); \end{cases}$$

das Integral linker Hand hat einen Sinn, wenn:

$$x > 0, \quad \Re(2\varrho) + \tfrac{3}{2} > \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}$$

vorausgesetzt wird; wenn y rein imaginär ist, kommt noch die neue Bedingung $\Re(\varrho) < 0$ hinzu.

Um die Koeffizienten zu bestimmen, denken wir uns die Cylinderfunktion folgendermaßen gegeben:

$$C^\nu(x) = aJ^\nu(x) + b\, Y^\nu(x).$$

Setzen wir dann zuerst $y = 0$, so müssen wir für den Augenblick $\Re(\nu - \varrho) > 0$, $\Re(\varrho) < 0$ annehmen; die Formeln § 70, (3), (4) geben dann ohne Schwierigkeit:

$$(2)\qquad c_2 = \frac{\pi i^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\Gamma(1+\varrho)}(-a - b\cot\varrho\pi);$$

multiplizieren wir ferner mit $x^{-\nu}$, so ergibt die Annahme $x = 0$, vorläufig unter den Voraussetzungen $\Re(\nu - \varrho) > 0$, $\Re(\varrho) < 0$, mittelst der Formel (Γ_{18}):

$$(3)\quad \begin{cases} c_1 \sin\pi(\nu-\varrho) + c_2\cos\pi(\nu-\varrho) = \\ \qquad = -\dfrac{\pi i^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\Gamma(1+\varrho)}(a + b\cot\nu\pi)e^{\pi(\varrho-\nu)i}. \end{cases}$$

Endlich multiplizieren wir mit x^ν und setzen wieder $x = 0$; eine Konstantenbestimmung ist dann möglich, falls vorläufig $\Re(\nu) > 0$, $\Re(\varrho - \nu) > 0$ angenommen wird. Wir finden mittelst (Γ_{18}):

$$(4)\qquad c_3 = -\frac{\pi b\, i^{\nu+\varrho}}{\sin\pi\varrho\,\sin 2\pi\nu}$$

und erhalten somit endlich die Formel:

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{C^\nu(tx)\, t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\varrho+1}}\, dt = \\ = \dfrac{\pi(iy)^{\nu-\varrho}x^\varrho}{2^{\varrho+1}\Gamma(1+\varrho)}\Big(AJ^{\nu-\varrho}(xyi) + BY^{\nu-\varrho}(xyi) + C\Pi^{\nu-\varrho,-\nu-\varrho}(xyi)\Big), \end{cases}$$

wo wir der Kürze halber:

$$(6)\quad \begin{cases} A = (a + b\cot\nu\pi)\, i + \dfrac{b\cos\pi(\nu-\varrho)}{\sin\nu\pi\sin\varrho\pi}, \\ B = -(a + b\cot\varrho\pi), \\ C = -\dfrac{2b\, e^{\varrho\pi i}}{\sin 2\nu\pi\sin\varrho\pi} \end{cases}$$

gesetzt haben.

Die allgemeine Formel (5) ist ja etwas kompliziert, indessen liefert sie durch Spezialisierungen der Parameter ν und ϱ oder der willkürlichen Funktionen a und b eine große Menge eleganter Formeln, welche man sonst auf andere Weise und von verschiedenen Prinzipien ausgehend herzuleiten pflegt; von diesen spezielleren Formeln wollen wir nun die wichtigsten mitteilen.

Wenn 2ν oder ϱ ganze Werte annehmen, wird der Ausdruck rechter Hand unbestimmt, läßt sich aber ohne Mühe durch die gewöhnlichen Methoden behandeln; wir gehen vorläufig nicht näher darauf ein, sondern betrachten hier nur den Spezialfall, in welchem die im Integrale vorkommende Cylinderfunktion von der ersten Art ist; wir haben dann $b = 0$ zu setzen und finden so die Formel:

$$(7)\qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\varrho+1}}\, dt = \frac{\pi i\, x^\varrho (iy)^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\Gamma(1+\varrho)} \cdot H_1^{\nu-\varrho}(xyi),$$

welche von Sonin[1]) gefunden worden ist.

§ 86. Verallgemeinerung zweier Integrale von Weber und Mehler.

Um die Formel § 85, (5) besser anwenden zu können, setzen wir in ihr $-iy$ für y, wo das neue y eine positive Größe bedeutet; sind nun weiter ν und ϱ reell und setzen wir außerdem:

$$(1)\qquad U^{\nu,\varrho} = \int_0^y \frac{C^\nu(tx)\, t^{\nu+1}}{(y^2-t^2)^{\varrho+1}}\, dt, \qquad W^{\nu,\varrho} = \int_y^\infty \frac{C^\nu(tx)\, t^{\nu+1}}{(t^2-y^2)^{\varrho+1}}\, dt,$$

während $V^{\nu,\varrho}$ das entsprechende Integral (5) bezeichnet, so finden wir:

$$(2)\qquad V^{\nu,\varrho} = -e^{\varrho\pi i}\, U^{\nu,\varrho} + W^{\nu,\varrho}.$$

Setzen wir jetzt die reellen und die imaginären Komponenten der beiden Seiten in (2) einander gleich, so erhalten wir sehr leicht die beiden neuen Integrale U und W. Wir bemerken, daß U und W in dem obenerwähnten Spezialfalle nur reell sein können, wenn

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 50; 1880.

wir für die Potenz $(-1)^{\varrho+1}$ den Wert rechter Hand in (2) nehmen. Auf diese Weise finden wir:

$$(3)\quad \begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} C^\nu(x\sin\varphi)(\sin\varphi)^{\nu+1}(\cos\varphi)^{2\varrho-1}d\varphi = \\ = \frac{\Gamma(\varrho)}{2^{1-\varrho}x^\varrho}\Big((a+b\cot\nu\pi)J^{\nu+\varrho}(x) - \frac{2b}{\sin 2\nu\pi}\Pi^{\nu+\varrho,-\nu+\varrho}(x)\Big), \end{cases}$$

$$(4)\quad \int\limits_y^\infty C^\nu(tx)t^{\nu+1}(t^2-y^2)^{\varrho-1}dt = \frac{\Gamma(\varrho)y^{\nu+\varrho}}{2^{1-\varrho}x^\varrho}\big(AJ^{\nu+\varrho}(xy)+BY^{\nu+\varrho}(xy)\big),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(5)\qquad A = b\sin\varrho\pi + a\cos\varrho\pi,\quad B = b\cos\varrho\pi - a\sin\varrho\pi$$

gesetzt haben.

Die Formel (3) ist für willkürliche endliche Werte von x anwendbar, falls nur $\Re(\varrho) > 0$, $\Re(\nu) > -1$ angenommen wird. In dem Falle, daß ν eine ganze Zahl ist, läßt sich der Ausdruck rechter Hand ohne Mühe bestimmen. Setzt man ferner $\nu = -\frac{1}{2}$ und $\varrho + \frac{1}{2}$ für ϱ, so gewinnt man die in § 18 gegebenen Integralausdrücke für $J^\varrho(x)$ und $Z^\varrho(x)$.

Die Formel (4) ist viel interessanter; sie erfordert übrigens die Bedingungen $x > 0$, $y > 0$, $\Re(\varrho) > 0$ und $\Re(2\varrho+\nu) < \frac{3}{2}$. Die Annahme $a = 1$, $b = i$ ergibt, wenn man $\varrho - 1$ für ϱ setzt und mittelst § 4, (2) das Vorzeichen von ν ändert, die Formel:

$$(6)\quad \int\limits_y^\infty H_1^\nu(tx)(t^2-y^2)^\varrho\cdot t^{1-\nu}dt = \frac{\Gamma(\varrho+1)\,y^{\varrho-\nu+1}\cdot 2^\varrho}{x^{\varrho+1}}H_1^{\nu-\varrho-1}(xy).$$

Von den übrigen Spezialfällen von (4) beschränken wir uns auf die folgenden:

1) $\varrho = n+1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; wir finden hier die merkwürdige Formel:

$$(7)\quad (-1)^{n+1}\int\limits_y^\infty C^\nu(tx)(t^2-y^2)^n\cdot t^{\nu+1}dt = \frac{n!\,2^n y^{\nu+n+1}}{x^{n+1}}C^{\nu+n+1}(xy),$$

wo wir $\Re(\nu+2n) < -\frac{1}{2}$ voraussetzen müssen; für $n = 0$ ist diese Formel in der Hauptsache mit § 10, (2) identisch.

2) $\varrho = n + \frac{1}{2}$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; hier erhalten wir die Formel:

$$(8)\quad \begin{cases} (-1)^n \int\limits_y^\infty C^\nu(tx)\,(t^2-y^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot t^{\nu+1}\,dt = \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,y^{\nu+n+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}-n}\,x^{n+\frac{1}{2}}} \left(b\,J^{\nu+n+\frac{1}{2}}(xy) - a\,Y^{\nu+n+\frac{1}{2}}(xy)\right), \end{cases}$$

wo $\Re(\nu + 2n) < \frac{1}{2}$ angenommen werden muß.

Bezeichnen wir nun mit $H_\omega^\nu(xy)$ für $\omega = 1, 2$ die zwei Hankelschen Cylinderfunktionen, so finden wir aus (8) die neue Formel:

$$(9)\quad \begin{cases} (-1)^{n+1+\omega} \cdot \int\limits_y^\infty H_\omega^\nu(tx)\,(t^2-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,t^{\nu+1}\,dt = \\ \qquad = \dfrac{i\,\Gamma(n+\frac{1}{2})\,y^{\nu+n+\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}-n}\,x^{n+\frac{1}{2}}}\,H_\omega^{\nu+n+\frac{1}{2}}(xy). \end{cases}$$

3) $\nu = n - \frac{1}{2}$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; setzen wir hier $-\varrho + \frac{1}{2}$ für ϱ, so ergibt eine Anwendung der Formeln § 3, (3), (4) unmittelbar:

$$(10)\quad \begin{cases} (-1)^n \int\limits_y^\infty \dfrac{C^{n-\frac{1}{2}}(tx)\,t^{n+\frac{1}{2}}}{(t^2-y^2)^{\varrho+\frac{1}{2}}}\,dt = \\ \qquad = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)\,y^{n-\varrho}\,x^{\varrho-\frac{1}{2}}}{2^{\varrho+\frac{1}{2}}} \left(b\,J^{\varrho-n}(xy) + a\,Y^{\varrho-n}(xy)\right), \end{cases}$$

wo wir $\frac{1}{2} > \Re(\varrho) > -\frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ annehmen müssen. Führen wir die Hankelschen Cylinderfunktionen ein, so erhalten wir eine zu (9) analoge Formel, während die Annahme $n = 0$ folgende zwei bemerkenswerten Formeln liefert:

$$(11)\qquad J^\varrho(xy) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2y}{x}\right)^\varrho}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)} \cdot \int\limits_y^\infty \frac{\sin(tx)}{(t^2-y^2)^{\varrho+\frac{1}{2}}}\,dt,$$

$$(12)\qquad Y^\varrho(xy) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2y}{x}\right)^\varrho}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\varrho)} \cdot \int\limits_y^\infty \frac{\cos(tx)}{(t^2-y^2)^{\varrho+\frac{1}{2}}}\,dt,$$

wo $\frac{1}{2} > \Re(\varrho) > -\frac{1}{2}$ angenommen werden muß.

Für $\varrho = 0$ hat Mehler[1]) die Formel (11) gefunden; indes hat Weber[2]) beinahe gleichzeitig denselben Spezialfall von (11) sowie

1) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 144; 1872.
2) Journal für Mathematik Bd. 75, p. 81; 1873.

von (12) gegeben, während die beiden allgemeinen Formeln zuerst von Sonin[1]) bewiesen worden sind. Neuerdings hat Weber[2]) abermals die beiden Formeln für $\varrho = 0$, aber auf ganz andere Weise hergeleitet. Es ist bemerkenswert, daß uns unsere späteren Untersuchungen in § 89 direkt zu den allgemeineren Formeln (11) und (12) führen.

§ 87. Verallgemeinerung eines Integrales von Meissel und Weber.

Wir kehren nun zu der allgemeinen Formel § 85, (5) zurück und führen die Funktion H_2^ν ein. Setzen wir noch $-ix$ für x, so finden wir folgende Formel:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{H_2^\nu(-txi)\, t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\varrho+1}}\, dt = \\ &= \frac{\pi e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} x^\varrho y^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\Gamma(\varrho+1)\sin\varrho\pi}\Big(-\cot\nu\pi J^{\nu-\varrho}(xy) + Y^{\nu-\varrho}(xy) + \frac{2}{\sin 2\nu\pi}\Pi^{\nu-\varrho,-\nu-\varrho}(xy)\Big), \end{aligned}\right.$$

welche anwendbar ist, falls $\Re(x) > 0$ und $\Re(\nu) > -1$ vorausgesetzt wird; wenn y rein imaginär ist, muß man außerdem $\Re(\varrho) < 0$ annehmen. Die entsprechende Formel mit H_1 läßt sich unmittelbar aus (1) herleiten, wenn man nur überall das Zeichen von i wechselt.

Wir bemerken, daß die Annahmen $\varrho = -\nu$ oder $\varrho = -\nu - 1$ die Funktionen $\Pi^{2\nu}(x)$ und $X^{2\nu+1}(x)$ in (1) einführen müssen. Wir betrachten den anderen Spezialfall $\nu = -\frac{1}{2}$ näher, der viel interessanter ist. Setzen wir nämlich $\frac{1}{2} - \nu$ für ϱ, so erhalten wir die bemerkenswerte Formel:

$$(2)\quad \int_0^\infty e^{-tx}(t^2+y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\, y^\nu}{2^{1-\nu}x^\nu}\big(Z^\nu(xy) - Y^\nu(xy)\big),$$

wo man im allgemeinen $\Re(x) > 0$ oder spezieller $\Re(x) = 0$, $\Re(\nu) < 0$ annehmen muß.

Setzt man in (2) $\nu = 0$ und führt man für $Z^0(xy)$ ihre Reihenentwicklung aus § 18, (11) ein, so gewinnt man eine Formel von Meissel[3]); führt man dagegen für $Z^\nu(xy)$ ihren Integralausdruck aus § 18, (10) ein, so findet man die Formel:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 39; 1880.

2) Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. 1, p. 175; 1900.

3) Gewerbeschulprogramm Iserlohn 1862. Citat von Meissel: Jahresbericht der Oberrealschule Kiel, 1890.

$$(3)\quad Y^{\nu}(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi - \int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-tx}\,dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}\right),$$

welche für ganze Werte von ν von Weber[1]) gefunden worden ist.

Die Formel (2) gestattet uns ferner, wie ich neuerdings gezeigt habe[2]), die Funktion rechter Hand in eine Fakultätenreihe zu entwickeln. Wir bemerken noch, daß uns dieselbe Formel leicht zu den Formeln § 86, (11), (12) führt; um dies zu erreichen, brauchen wir in der Tat nur längs der Peripherie eines von den positiven Achsen der reellen und der imaginären Zahlen begrenzten Kreisviertels von unendlichem Radius und mit dem Zentrum im Anfangspunkte zu integrieren.

Setzen wir ferner in (1) $\varrho = -n-1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und außerdem xi für x, so finden wir mittelst § 30, (1), (2) und § 3, (3), (4) die Formel:

$$(4)\quad (-1)^n \cdot \int\limits_{0}^{\infty} H_2^{\nu}(tx)\,(t^2+y^2)^n t^{\nu+1}\,dt = -i\cdot\frac{n!\,2^n y^{\nu+n+1}}{x^{n+1}} B^{\nu,n}(xy),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(5)\qquad B^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+n-s+1)}{s!}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+n-2s+1}$$

gesetzt haben. Es ist in der Tat höchst merkwürdig, daß der Wert des Integrales (5) für positive x und y und für ein reelles ν rein imaginär ist. Doch darf man im allgemeinen ja nicht die reelle und die imaginäre Komponente linker Hand trennen, weil die so erhaltenen Integrale mit den Funktionen J und Y im allgemeinen beide divergieren.

Betrachten wir jetzt die ganze transcendente Funktion:

$$(6)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

wo die Koeffizienten a_n so beschaffen sein sollen, daß, wenn λ eine endliche Zahl bedeutet:

$$(7)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{a_n (n!)^2}{n^{\lambda}} = 0$$

wird, und setzen wir in dem Integrale:

---

1) Journal für Mathematik Bd. 76, p. 10; 1873.

2) Comptes rendus Bd. 134; 1902

$$I = \int_0^\infty H_2^\nu(tx)\, t^{\nu+1} f\left(z(t^2+y^2)\right) dt$$

für f die Reihe (6) ein, so finden wir durch *formale* gliedweise Integration:

$$(8) \qquad I = -i \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, s!\, 2^s\, y^{\nu+s+1}\, z^s}{x^{s+1}} \cdot a_s \cdot B^{\nu,s}(xy),$$

eine Formel, welche einem bekannten Satze[1]) zufolge anwendbar ist, wenn nur die Reihe rechter Hand konvergiert. Beachtet man indessen, daß (5) für ein sehr großes s die asymptotische Gleichheit:

$$B^{\nu,s}(xy) \sim \Gamma(\nu+s+1)\left(\frac{2}{xy}\right)^{\nu+s+1}$$

liefert, so folgt aus (7), daß die Reihe rechter Hand in (8) konvergiert, wenn:

$$(9) \qquad |4z| < |x|^2$$

ist; in diesem Falle ist die Formel (8) also wirklich gültig.

Darf man nun in dem Integrale I die reelle und die imaginäre Komponente trennen, so findet man folgende zwei Formeln:

$$(10) \qquad \int_0^\infty J^\nu(tx)\, f\left(z(t^2+y^2)\right) t^{\nu+1}\, dt = 0,$$

$$(11) \quad \int_0^\infty Y^\nu(tx)\, f\left(z(t^2+y^2)\right) t^{\nu+1}\, dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s s!\, a_s\, 2^s \cdot \frac{z^s\, y^{\nu+s+1}}{x^{s+1}} B^{\nu,s}(xy).$$

Die Formel (8) zeigt also, daß sich unser Integral I für hinlänglich kleine Werte von $|z|$ nach positiven ganzen Potenzen dieser Variabeln entwickeln läßt. Führen wir nunmehr statt B den Ausdruck (5) ein und ordnen wir nach Potenzen von x, so erhalten wir die Formel:

$$I = -i \sum_{s=0}^{s=\infty} 2^{\nu+2s+1}\, \Gamma(\nu+s+1) \cdot \frac{z^s}{x^{\nu+2s+2}} \cdot F_s(y^2 z),$$

wo wir der Kürze halber:

$$F_s(y) = (-1)^s \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(s+p)!}{p!}\, a_{p+s}\, y^p$$

gesetzt haben, so daß also:

$$F_s(y) = (-1)^s f^{(s)}(y)$$

1) U. Dini: Grundlagen etc. p. 524; Leipzig 1892.

sein muß; damit haben wir folgende merkwürdige Formel bewiesen:

$$(12)\quad \left| \begin{aligned} &\int_0^{\infty} H_2^{\nu}(tx) f\left(z(t^2+y^2)\right) t^{\nu+1}\,dt = \\ &\qquad = -\frac{i}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s \Gamma(\nu+s+1)\, z^s\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+2s+2} f^{(s)}(y^2 z). \end{aligned}\right.$$

Von Funktionen $f(x)$, welche der Bedingung (7) genügen, nennen wir $J^{\varrho}(x)$, $\cos(\sqrt{x})$, $\sin(\sqrt{x})$.

§ 88. **Asymptotische Ausdrücke für die Lommelsche Funktion.**

Wir haben noch eine wichtige Anwendung der allgemeinen Formel § 87, (1) zu zeigen, durch die wir eine asymptotische Darstellung der Lommelschen Funktion zu geben vermögen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir in der erwähnten Formel mit $y^{2\varrho+2}$ und betrachten sonach das bestimmte Integral:

$$(1)\qquad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{H_2^{\nu}(-txi)\, t^{\nu+1}}{\left(1+\frac{t^2}{y^2}\right)^{\varrho+1}}\,dt,$$

wo wir also:

$$(2)\qquad \Re(\nu) > -1,\quad \Re(x) > 0,\quad \Re(iy) \neq 0$$

annehmen müssen.

Wir betrachten ferner folgende Taylorsche Reihe:

$$(3)\qquad \left(1+\frac{t^2}{y^2}\right)^{-\varrho-1} = \sum_{s=0}^{s=n}\binom{-\varrho-1}{s}\left(\frac{t}{y}\right)^{2s} + R_n,$$

wo das Restglied R_n ein Ausdruck von derselben Form wie $R_n(t)$ in § 58 bedeutet. Führen wir nun die Entwicklung (3) in (1) ein, so liefert die Webersche Formel § 72, (8) ohne weiteres die Entwicklung:

$$(4)\quad f(x) = \frac{y^{\nu+2} e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{2\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\binom{-\varrho-1}{s} s!\,\Gamma(\nu+s+1)\left(\frac{2}{xy}\right)^{\nu+2s+2} + R_n'.$$

Erinnert man sich aber, daß sich die Hankelsche Funktion $H_2^{\nu}(-xi)$ für große Werte von $|x|$ wie e^{-x} verhält, so ergibt dieselbe Methode wie in § 58:

$$(5)\qquad \lim_{|x|=\infty} |x^{2n} R_n'| = 0,\quad \Re(x) > 0;$$

das heißt aber, daß die Formel (4) für $y = 1$ und $\Re(x) > 0$ eine

asymptotische Reihe im Sinne Poincarés[1]) darstellt. Setzt man weiter $xy = ri$, wo r eine positive Größe bedeutet, so muß man dagegen in (4) $x = re^{i\varphi}$, $y = ie^{-i\varphi}$ annehmen, wo $\frac{\pi}{4} > \varphi > -\frac{\pi}{4}$ sein muß; die Formel (5) bleibt dann noch immer gültig.

Nach diesen Erörterungen setzen wir in (4) ν und ϱ für $\nu - \varrho$, bez. $-\nu - \varrho$ und finden mittelst § 87, (1) folgenden allgemeinen Satz:

Setzt man voraus, daß:

$$\Re(\nu - \varrho) > -2 \tag{6}$$

ist, so wird die asymptotische Reihenentwicklung:

$$\left\{\begin{aligned} &2\Pi^{\nu,\varrho}(x) + \sin\pi(\nu-\varrho)\,Y^{\nu}(x) - 2\cos^2\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)\,J^{\nu}(x) \sim \\ &\sim -\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\nu+\varrho)\sin\pi(\nu-\varrho)}{\pi^2}\cdot \\ &\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\,\Gamma\left(\frac{\nu-\varrho}{2}+s+1\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\varrho}{2}+s+1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^{2s+2-\varrho} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

in der ganzen Ebene anwendbar, wo:

$$x = |x|\,e^{i\theta}, \quad 0 < \theta \leqq 2\pi. \tag{8}$$

Es ist bemerkenswert, daß der Ausdruck rechter Hand in (7) mit der Formel:

$$\Pi^{\nu,\varrho}(xe^{\pi i}) = e^{\varrho\pi i}\,\Pi^{\nu,\varrho}(x) \tag{9}$$

übereinstimmt, während dies nicht mit den letzten Gliedern linker Hand der Fall ist. Was die Bedingung (6) anbetrifft, so denken wir uns $0 \geqq \Re(\nu - \varrho) > -2$; bezeichnet dann p eine positive ganze Zahl, so ergibt § 29, (4):

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi^{\nu,\varrho+2p}(x) = \\ &= \Pi^{\nu,\varrho}(x) - \cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)\cdot\sum_{s=0}^{s=p-1}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

und nun läßt sich die Lommelsche Funktion rechter Hand mittelst (7) entwickeln.

Die Formel (7) ist von fundamentaler Bedeutung; denn aus ihr kann man durch einfache Spezialisierungen der Parameter ϱ und ν unmittelbar eine große Menge von spezielleren Formeln herleiten,

1) Acta Mathematica Bd. 8, p. 297; 1886.

welche man sonst jede einzeln für sich und nach verschiedenen Prinzipien zu entwickeln pflegt. Wir betrachten nun die wichtigsten dieser Spezialfälle näher.

1) $\varrho = 0$, bez. $\varrho = 1$; wir finden unmittelbar:

$$\Pi^{\nu}(x) - \cos^2\frac{\nu\pi}{2} J^{\nu}(x) + \frac{1}{2}\sin\nu\pi\, Y^{\nu}(x) \sim -\frac{\sin\nu\pi}{\pi} A_n^{\nu}(x), \tag{11}$$

$$\mathrm{X}^{\nu}(x) - \sin^2\frac{\nu\pi}{2} J^{\nu}(x) - \frac{1}{2}\sin\nu\pi\, Y^{\nu}(x) \sim \frac{\sin\nu\pi}{\pi} B_n^{\nu}(x), \tag{12}$$

wo wir der Kürze halber:

$$A_n^{\nu}(x) = \frac{\nu}{x^2} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\nu(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)\cdots(\nu^2-4s^2)}{x^{2s+2}}, \tag{13}$$

$$B_n^{\nu}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)\cdots\left(\nu^2-(2s-1)^2\right)}{x^{2s+1}} \tag{14}$$

gesetzt haben; wir müssen also in (11) und (12) $\Re(\nu) > -2$, bez. $\Re(\nu) > -1$ annehmen. Führen wir nun mittelst der Formeln des § 17 die Funktionen Ψ und Ω ein, so erhalten wir die weiteren asymptotischen Reihen:

$$\Psi^{\nu}(x) - J^{\nu}(x) \sim \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left(B_n^{\nu}(x) - A_n^{\nu}(x)\right), \tag{15}$$

$$\Omega^{\nu}(x) - Y^{\nu}(x) \sim \frac{2\cos^2\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} B_n^{\nu}(x) + \frac{2\sin^2\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} A_n^{\nu}(x), \tag{16}$$

wo also $\Re(\nu) > -1$ angenommen werden muß. Führen wir in diese Formel noch die aus § 59, (1), (2) für J und Y erhaltenen asymptotischen Reihen ein, so finden wir zwei Formeln, welche H. F. Weber-Zürich[1]) ohne Beweis mitgeteilt hat.

Aus (11) und (12) erhalten wir ferner mittelst § 24, (13), (14) für die Integrale von Fresnel die asymptotischen Reihen:

$$\begin{cases} F_1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sim \\ \qquad \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}\, B_n^{\frac{1}{2}}(x)\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{x}\, A_n^{\frac{1}{2}}(x)\cos x, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} F_2(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sim \\ \qquad \sim -\frac{1}{2}\sqrt{x}\, B_n^{\frac{1}{2}}(x)\cos x - \frac{1}{2}\sqrt{x}\, A_n^{\frac{1}{2}}(x)\sin x, \end{cases} \tag{18}$$

---

1) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. 24, p. 48; 1879.

die zuerst von Cauchy[1]) aufgestellt worden sind; eine Anwendung der Formel § 34, (12) ergibt nun auch ohne Mühe die asymptotische Reihe für das Integral von Kramp; wir werden diese Formel indessen später, in § 95, durch andere Methoden direkt herleiten.

2) $\varrho = \nu - 2p$, wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; wir finden nach § 30, (11) die neue Entwicklung:

$$(19)\quad \begin{cases} L^{\nu,p}(x) - \pi Y^{\nu}(x) \sim \dfrac{(-1)^p \sin\nu\pi}{\pi} \cdot \\ \quad \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=n} (-1)^s \Gamma(s+p-\nu+1)\,(p+s)!\left(\dfrac{2}{x}\right)^{2s+2p+2-\nu}; \end{cases}$$

setzen wir wiederum in dieser Formel $p = 0$, $\nu = \pm \frac{1}{2}$, so erhalten wir mittelst (Γ_4):

$$(20)\quad L^{\frac{1}{2}}(x) + \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cos x \sim \sqrt{\frac{8}{\pi x}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s)!}{x^{2s+1}},$$

$$(21)\quad L^{-\frac{1}{2}}(x) - \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\sin x \sim -\sqrt{\frac{8}{\pi x}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s+1)!}{x^{2s+2}},$$

so daß die Formeln § 34, (17), (18) für den Integralcosinus und Integralsinus folgende Entwicklungen liefern:

$$(22)\quad C_i(x) = \sin x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s)!}{x^{2s+1}} - \cos x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s+1)!}{x^{2s+2}},$$

$$(23)\quad S_i(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s)!}{x^{2s+1}} - \sin x \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \frac{(2s+1)!}{x^{2s+2}};$$

wenden wir weiterhin die Formel (16) des § 34 an, so gewinnen wir, falls $x > 0$ ist, die analoge Entwicklung für den Integrallogarithmus:

$$(24)\quad \mathrm{li}\, e^{-x} \sim e^{-x} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^{s+1} s!}{x^{s+1}}.$$

3) $\varrho = \nu - 2p + 1$, wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; die Formel § 30, (8) gibt die neue asymptotische Entwicklung:

---

1) Comptes rendus Bd. 15, p. 554—556; 1842.

$$(25)\quad \begin{cases} Z^{\nu,-p}(x) - Y^{\nu}(x) \sim \dfrac{(-1)^p \cos \nu\pi}{\pi^2} \cdot \\ \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=n} (-1)^s \Gamma\left(s+p+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+p+s+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{x}\right)^{-\nu+2s+2p+1}; \end{cases}$$

diese Formel ist für $p=0$, $\nu=0$, $\nu=1$ von Struve[1]) und Lord Rayleigh[2]) gefunden worden, während P. Siemon[3]) den etwas allgemeineren Fall angegeben hat, in welchem $p=0$ und ν ganz, aber nicht negativ ist.

Kapitel XVI.

Weitere Anwendungen der ersten und zweiten Methode.

§ 89. Über das Integral $\int\limits_0^\infty C^\nu(tx) C_1^\nu(tx)(t^2+y^2)^\sigma t^\varrho\, dt$.

Wir haben die erste Methode noch auf das folgende Integral anzuwenden:

$$(1)\qquad \mathfrak{S}(xy) = \int\limits_0^\infty C^\nu(tx)\, C_1^\nu(tx)(t^2+y^2)^\sigma t^{\varrho-\omega} dt.$$

Der Satz § 77, I ergibt ohne Mühe folgende Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}^{(4)}(x) + \dfrac{6-3\omega}{x}\mathfrak{S}^{(3)}(x) + \left(-4+\dfrac{1+3(\omega-1)(\omega-2)-4\nu^2}{x^2}\right)\mathfrak{S}^{(2)}(x) + \\ + \left(\dfrac{8\sigma+4\omega-8}{x} + \dfrac{(\omega-1)\left(4\nu^2-(\omega-1)^2\right)}{x^3}\right)\mathfrak{S}^{(1)}(x) + \dfrac{8\sigma(1-\omega)}{x^2}\mathfrak{S}(x) = 0. \end{cases}$$

Wir bemerken zuerst, daß eine Vergleichung zwischen (2) und § 56, (6) kein Resultat liefert; dagegen werden (2) und § 51, (14) identisch, wenn:

$$\beta = 2i,\ a = 2-\omega-2\sigma,\quad b = 2\sigma\omega - 2\sigma,\quad \alpha = \omega-\sigma-\tfrac{3}{2},$$
$$\alpha^2 - \gamma^2 + 4\nu^2 = (\omega-2\sigma)(\omega-2\sigma-5)+7,$$
$$(2\sigma+3)(\alpha^2-\gamma^2) = (\omega-2\sigma-2)(\omega-2\sigma-3),$$
$$(\sigma+1)(\omega+1)(\alpha^2-\gamma^2) = 0.$$

Um nun diese Gleichungen aufzulösen, gehen wir von der letzten aus und finden dann ohne Mühe folgende fünf verschiedenen Systeme

1) Wiedemann Annalen Bd. 17, p. 1012; 1882.
2) Theory of Sound, Bd. 2, p. 168; 1896.
3) Programm der Luisenschule Berlin, p. 13; 1890.

von Werten der Parameter, wo δ_1 und δ_2 aus § 51, (13) zu nehmen sind:

1) $\sigma = -1$, $\gamma = \nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \omega - \frac{1}{2}$, $\varrho = \omega + \frac{1}{2}$, $\delta_1 = \frac{1}{2} - \omega$, $\delta_2 = \frac{3}{2}$,

2) $\gamma = \nu$, $\alpha = -\nu - 1$, $\sigma = \nu - \frac{3}{2}$, $\varrho = 1 - 2\nu$, $\omega = -1$, $\delta_1 = 3\nu$, $\delta_2 = \nu + 1$,

3) $\gamma = 2\nu$, $\alpha = -1$, $\varrho = 1$, $\sigma = -\frac{3}{2}$, $\omega = -1$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$,

4) $\gamma = \alpha = \sigma + \frac{1}{2}$, $\varrho = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\omega = 2\sigma + 2$, $\delta_1 = \sigma + \frac{3}{2}$, $\delta_2 = \sigma + \frac{5}{2}$,

5) $\gamma = \alpha = \sigma + \frac{3}{2}$, $\varrho = 2$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\omega = 2\sigma + 3$, $\delta_1 = \sigma + \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \sigma + \frac{5}{2}$.

Nun ist offenbar, daß der Fall 1) kein besonderes Interesse darbietet; weiter sehen wir, daß die Fälle 4) und 5) genau auf die allgemeinen Integralformeln von Weber und Mehler, (11) und (12) des § 86, führen; wir gehen indessen nicht näher auf diesen neuen Beweis der zwei interessanten Formeln ein und haben somit nur die beiden Fälle 2) und 3) näher zu diskutieren.

§ 90. Integraldarstellungen für die Poisson-Angersche Funktion.

Im Falle 3) betrachten wir zuerst das Integral, in welchem die Cylinderfunktionen beide von der ersten Art sind; wir finden eine Formel von folgender Form:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{(J^\nu(tx))^2 t\,dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y}\left(c_1 J^{2\nu}(2xyi) + c_2 \mathrm{X}^{2\nu}(2xyi)\right),$$

wo man $x > 0$, $\Re(\nu) > -1$ voraussetzen muß, während y nicht rein imaginär sein darf. Unter der Voraussetzung $0 < \Re(\nu) < \frac{1}{2}$ muß sich das Integral linker Hand für kleine Werte von x wie die Potenz $x^{2\nu}$ verhalten, also mit x gegen Null konvergieren; dies kann aber mit dem Ausdrucke rechter Hand nur der Fall sein, wenn es nicht die Funktionen $Y^{2\nu}(2xyi)$ und $\Pi^{2\nu}(2xyi)$ enthält; also ist die Form der Formel (1) sichergestellt.

Nach diesen Erörterungen dividieren wir die beiden Seiten von (1) durch $x^{2\nu}$, so daß die Annahme $x = 0$ ohne weiteres gibt:

$$c_1 = \frac{e^{-\nu\pi i}}{\cos\nu\pi},$$

während die Annahme $y = 0$ unter Anwendung der Schafheitlinschen Formel § 73, (15) folgende Bestimmung von c_2 liefert:

$$c_2 = \frac{i}{\cos \nu\pi \cdot \sin \nu\pi},$$

so daß wir schließlich folgende Formel finden:

$$(2) \qquad \int_0^x \frac{(J^\nu(tx))^2 t\,dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \\ = \frac{1}{y \cos \nu\pi} \left(e^{-\nu\pi i} J^{2\nu}(2xyi) + \frac{i}{\sin \nu\pi} \mathsf{X}^{2\nu}(2xyi) \right);$$

wenn n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, muß (2) die Funktion $\Omega^{2n}(2xyi)$ enthalten; diese speziellere Formel wird den in § 84, (5), (6) ganz ähnlich. Im Falle $\nu = n + \frac{1}{2}$ finden wir dagegen die zu § 84, (3), (4) analoge Formel:

$$(3) \qquad \int_0^x \frac{(J^{n+\frac{1}{2}}(tx))^2 t\,dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{i}{y} \left(S^{2n+1}(2xyi) - \pi i H_1^{2n+1}(2xyi) \right),$$

wo S wie gewöhnlich die rationale Funktion von Schläfli bedeutet.

Wir betrachten weiterhin die zu (1) analoge Formel:

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx) J^{-\nu}(tx)\, t\,dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y} \left(c_1 \Pi^{2\nu}(2xyi) + c_2 \mathsf{X}^{2\nu}(2xyi) \right),$$

wo $x > 0$ ist und y nicht rein imaginär sein darf. Beachten wir nämlich, daß das Integral linker Hand für $x = 0$ einen bestimmten Wert haben muß, so ist es einleuchtend, daß die Funktionen $J^{2\nu}(2xyi)$ und $Y^{2\nu}(2xyi)$ nicht in dem Ausdrucke rechter Hand auftreten dürfen.

Die Annahme $x = 0$ ergibt unmittelbar:

$$c_1 = \frac{1}{\cos \nu\pi},$$

während die Bestimmung von c_2 etwas schwieriger ist; sie läßt sich offenbar am einfachsten durch Zuhilfenahme der asymptotischen Ausdrücke des § 88 durchführen. Wir setzen also x als sehr groß und positiv voraus, während y als positiv angenommen wird. Das Integral muß also einen endlichen Wert haben; führen wir aber rechter Hand die Ausdrücke § 88, (11), (12) ein, so zeigen die

Formeln in § 59, daß der so erhaltene Ausdruck dann und nur dann endlich werden kann, wenn:

$$c_2 = \frac{i}{\sin \nu\pi}$$

ist, und somit finden wir die Formel:

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx) J^{-\nu}(tx)\, t\, dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{\cos\nu\pi} \Pi^{2\nu}(2xyi) + \frac{i}{\sin\nu\pi} \mathrm{X}^{2\nu}(2xyi)\right).$$

Die Spezialfälle $\nu = n$, $\nu = n + \frac{1}{2}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, lassen sich ohne Mühe behandeln, so daß wir dieselben ohne weiteres übergehen dürfen. Führen wir nun weiter in (5) für $J^{-\nu}(tx)$ den Ausdruck § 3, (3) ein, so finden wir mittelst (2) die neue Formel:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, Y^\nu(tx)\, t\, dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{y}\left(\frac{\cos^2\nu\pi\, J^{2\nu}(2xyi) - \Pi^{2\nu}(2xyi)}{\cos\nu\pi \cdot \sin\nu\pi} - iJ^{2\nu}(2xyi)\right); \end{cases}$$

wenn ν hier eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so entsteht eine zu (3) ganz analoge Formel. Ändern wir ferner in (6) das Zeichen von ν und führen wir mittelst § 3, (3), (4) wieder Cylinderfunktionen mit dem Parameter 2ν ein, so erhalten wir das entsprechende Integral, welches das Quadrat von $Y^\nu(tx)$ enthält; es wird indessen ziemlich kompliziert.

§ 91. **Integraldarstellung für die Funktion** $Z^\nu(x)$.

Im zweiten Falle führen die gewöhnlichen Überlegungen zu einer Formel von der Form:

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{(J^\nu(tx))^2\, t^{1-2\nu}}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\nu}}\, dt = \frac{1}{x^\nu y^{\nu+1}}\left(c_1 \Pi^{\nu,3\nu}(2xyi) + c_2 Z^\nu(2xyi)\right),$$

wo $x > 0$ sein muß, während y nicht rein imaginär vorausgesetzt werden darf, außer wenn $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ ist.

Um die Koeffizienten zu bestimmen, multiplizieren wir zuerst in (1) mit $x^{-2\nu}$; die Annahme $x = 0$ gibt dann unmittelbar mittelst (Γ_{18}):

$$c_1 = -\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2})\, e^{-\frac{3\nu\pi i}{2}}}{2\sqrt{\pi}\cos\nu\pi},$$

während $y = 0$ mit Zuhilfenahme von § 73, (15) folgenden Ausdruck für c_2 liefert:

$$c_2 = \frac{-i\Gamma(\nu - \frac{1}{2})\, e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{2\sqrt{\pi}};$$

somit haben wir folgende Formel bewiesen:

$$(2)\qquad \int_0^\infty \frac{(J^\nu(tx))^2 t^{1-2\nu}\, dt}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\nu}} =$$

$$= -\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2})\, e^{-\frac{3\nu\pi i}{2}}}{2\sqrt{\pi}\, x^\nu y^{\nu+1}} \left(\frac{\Pi^{\nu, 3\nu}(2xyi)}{\cos\nu\pi} + i e^{\nu\pi i} Z^\nu(2xyi) \right).$$

Setzen wir nun weiter $-iy$ für y, wo das neue y positiv ist, und teilen wir das Integrationsintervall in zwei andere, nämlich von $t = 0$ bis $t = y$ und von $t = y$ bis $t = \infty$, so finden wir durch das gewöhnliche Verfahren die zwei bemerkenswerten Formeln:

$$(3)\qquad \Pi^{\nu, 3\nu}(2xy) = \frac{2\sqrt{\pi}\cos\nu\pi \cdot x^\nu y^{\nu+1}}{\Gamma(\nu - \frac{1}{2})} \cdot \int_0^y \frac{(J^\nu(tx))^2 t^{1-2\nu}\, dt}{(y^2 - t^2)^{\frac{3}{2}-\nu}},$$

$$(4)\qquad Z^\nu(2xy) = \frac{2\sqrt{\pi}\, x^\nu y^{\nu+1}}{\Gamma(\nu - \frac{1}{2})} \cdot \int_y^\infty \frac{(J^\nu(tx))^2 t^{1-2\nu}\, dt}{(t^2 - y^2)^{\frac{3}{2}-\nu}},$$

wo man also $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ annehmen muß; für $\nu = 1$ erhält man aus (4) eine spezielle Formel, welche von Struve[1]) gefunden worden ist.

Auf ganz dieselbe Weise findet man eine Formel von folgender Form:

$$\int_0^\infty \frac{J^\nu(tx) J^{-\nu}(tx)\, t^{1-2\nu}}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\nu}}\, dt = \frac{1}{x^\nu y^{\nu+1}} \left(c_1 J^\nu(2xyi) + c_2 Z^\nu(2xyi) \right),$$

wo man $x > 0$ und $\Re(\nu) < 1$ voraussetzen muß; wenn y rein imaginär ist, muß außerdem noch $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ sein. Die Annahme $x = 0$ ergibt mittelst (Γ_{18}):

$$c_1 = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{2\,\Gamma(\frac{3}{2} - \nu)};$$

1) Wiedemann Annalen Bd. 17, p. 1011; 1882.

für die Bestimmung von c_2 muß man dagegen x sehr groß und positiv annehmen, während zugleich y als positiv vorausgesetzt wird; die Formeln § 88, (25) und § 59, (3) und (4) geben dann $c_2 = ic_1$, so daß man endlich folgende Formel erhält:

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)J^{-\nu}(tx)\,t^{1-2\nu}}{(t^2+y^2)^{\frac{3}{2}-\nu}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{2\,\Gamma(\frac{3}{2}-\nu)\,x^\nu y^{\nu-1}}\Big(J^\nu(2xyi)+iZ^\nu(2xyi)\Big).$$

Setzt man hier $-iy$ für y, wo das neue y positiv vorausgesetzt wird, so findet man durch die gewöhnliche Methode die weitere Formel:

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & J^\nu(2x) = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}\,x^\nu}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^\nu(x\cos\varphi)\,J^{-\nu}(x\cos\varphi)\,(\cos\varphi)^{1-2\nu}(\sin\varphi)^{2\nu-2}d\varphi, \end{aligned} \right.$$

während das übriggebliebene Integral mit den Grenzen y und ∞ etwas komplizierter wird; in (6) muß man $1 > \Re(\nu) > \frac{1}{2}$ voraussetzen.

Statt das ähnliche Integral mit dem Quadrate $\big(J^{-\nu}(x)\big)^2$ zu untersuchen, betrachten wir das folgende:

$$\int_0^\infty \frac{\big(J^\nu(tx)\big)^2\,t^{2\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}\,dt = x^\nu y^{\nu-1}\Big(c_1 J^\nu(2xyi) + c_2 Z^{-\nu}(2xyi)\Big);$$

die Koeffizienten lassen sich auch hier ohne Mühe bestimmen, so daß man schließlich zu der Formel gelangt:

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\big(J^\nu(tx)\big)^2\,t^{2\nu+1}}{(t^2+y^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}\,dt = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}\,x^\nu y^{\nu-1}}{2\cos\nu\pi\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\Big(e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}J^\nu(2xyi)+iZ^{-\nu}(2xyi)\Big), \end{aligned} \right.$$

welche anwendbar ist, falls $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ angenommen wird; in dieser Formel darf y daher nicht rein imaginär angenommen werden.

§ 92. Über das Integral $\int_0^x C^\nu(tx)(t+y)^\sigma t^\varrho dt$.

Um auch eine Anwendung der zweiten Methode zu geben, betrachten wir das Integral:

$$(1)\qquad \mathfrak{T}(xy) = \int_0^x C^\nu(tx)(tx)^\omega t^{\varrho-\omega}(t+y)^\sigma dt,$$

mit Bezug auf welches die transformierte Besselsche Gleichung § 47, (4) für $\gamma = 1$ die andere ergibt:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}^{(4)}(x) + \frac{5-2\omega}{x}\mathfrak{T}^{(3)}(x) + \left(1 + \frac{(\omega-2)^2-\nu^2}{x^2}\right)\mathfrak{T}^{(2)}(x) + \\ \qquad + \frac{2(1-\sigma)}{x}\mathfrak{T}^{(1)}(x) + \frac{\sigma(\sigma-1)}{x^2}\mathfrak{T}(x) = 0, \end{cases}$$

welche wir mit § 51, (14) zu vergleichen haben. Die Identität beider Gleichungen erfordert, daß:

$$\begin{aligned} &\alpha = \omega - \sigma - 1, \quad a = 2 - 2\sigma, \quad b = \sigma^2 - \sigma, \quad \beta = 1, \\ &\sigma(\sigma+1)(1-2\alpha) - 2(\sigma+1)(\alpha^2-\gamma^2) = 0, \\ &\alpha^2 - \gamma^2 + \sigma(4\alpha + \sigma - 3) = (\omega-2)^2 - \nu^2, \\ &(\sigma+1)(\sigma+2)(\nu^2-\gamma^2) = 0 \end{aligned}$$

ist. Die letzte dieser Gleichungen erfordert dann wieder die Untersuchung folgender drei verschiedener Fälle:

1) $\sigma = -1, \quad \alpha = \varrho = \omega, \quad \gamma = \nu, \quad \delta_1 = 1 - \varrho, \quad \delta_2 = -\varrho,$

2) $\sigma = -2, \quad \alpha = \varrho = \nu, \quad \omega = \gamma = \alpha - 1, \quad \delta_1 = -\varrho,$ $\delta_2 = -1 - \varrho,$

3) $\nu = \gamma = \pm\frac{1}{2}, \quad \alpha = \varrho = \frac{1}{2}, \quad \omega = \sigma + \frac{3}{2}, \quad \delta_1 = \sigma + \frac{3}{2},$ $\delta_2 = \sigma + \frac{1}{2},$

von welchen der letzte zu § 89, 1) analog ist und daher kein besonderes Interesse darbietet, so daß wir uns auf die zwei ersten beschränken dürfen.

Im ersten Falle betrachten wir nur das Integral mit der Besselschen Cylinderfunktion und finden eine Formel von folgender Form:

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)t^\varrho dt}{t+y} = y^\varrho\left(c_1 J^\nu(xy) + c_2 \Pi^{\nu,-\varrho}(xy) + c_3\Pi^{\nu,1-\varrho}(xy)\right),$$

wo wir $\Re(\nu+\varrho) > -1$ und $\Re(\varrho) < \frac{3}{2}$ annehmen müssen, während y nicht negativ sein darf. Um nun die Koeffizienten zu be-

stimmen, setzen wir erstens $y = 0$, so daß die Webersche Formel § 72, (2) unmittelbar ergibt:

$$c_2 = \frac{\pi}{\sin \pi (\nu + \varrho)};$$

weiter dividieren wir in (1) durch x^ν und setzen dann $x = 0$; die Formel (Γ_{17}) liefert dann ohne weiteres $c_1 = -c_2$. Um endlich auch c_3 zu bestimmen, multiplizieren wir in (1) mit y und denken uns y sehr groß und positiv; die gewöhnlichen asymptotischen Entwicklungen der §§ 59 und 88 geben dann mittelst § 72, (2) $c_3 = c_2$, und wir finden so folgende einfache Formel:

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^\varrho}{t + y}\, dt = \frac{\pi y^\varrho}{\sin \pi (\nu + \varrho)} \Big(\Pi^{\nu, -\varrho}(xy) + \Pi^{\nu, 1-\varrho}(xy) - J^\nu(xy) \Big),$$

welche einige elegante Spezialfälle darbietet.

Erstens setzen wir $\varrho = 0$ und finden:

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, dt}{t + y} = \frac{\pi}{\sin \nu\pi} \Big(\Psi^\nu(xy) - J^\nu(xy) \Big), \quad \Re(\nu) > -1,$$

wo $\Psi^\nu(x)$ die Poisson-Angersche Funktion bedeutet; nimmt man ν gleich einer ganzen, nicht negativen Zahl n, so erhält man mittelst § 17, (27) die speziellere Formel:

$$(4) \quad (-1)^n \int_0^\infty \frac{J^n(tx)\, dt}{t + y} = \frac{\pi}{2} \Big(\Omega^n(xy) + S^n(xy) - Y^n(xy) \Big),$$

wo $S^n(x)$ die rationale Funktion von Schläfli bedeutet.

Wir setzen ferner in (2) $\varrho = \nu$ und finden, vorausgesetzt, daß $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < \frac{3}{2}$ ist, die weitere Formel:

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^\nu\, dt}{t + y} = \frac{\pi y^\nu}{2 \cos \nu\pi} \Big(Z^{-\nu}(xy) - \sin \nu\pi\, J^\nu(xy) \Big) - \frac{\pi y^\nu}{2} Y^\nu(xy);$$

für $n = 0$, bez. $\nu = 0$ werden die Formeln (4) und (5) identisch.

Der dritte Spezialfall von (2), wo $\nu + \varrho$ eine ganze Zahl bedeutet, läßt sich nach der gewöhnlichen Methode behandeln; wir finden so Formeln, die zu § 84, (5), (6) analog sind.

Im Falle 2) erhalten wir eine Formel von folgender Form:

$$(6) \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^\nu\, dt}{(t + y)^2} = x y^\nu \Big(c_1 J^{\nu-1}(xy) + c_2 Y^{\nu-1}(xy) + c_3 \Pi^{\nu-1, -\nu}(xy) \Big),$$

wo $x > 0$ und $\frac{3}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden muß, während y nicht reell und negativ sein darf. Wir bemerken, daß die übrigen Integrale von der Form (6) auch die Derivierte der Lommelschen Funktion, nach dem Parameter ϱ genommen, enthalten müssen.

Die Annahme $y = 0$ ergibt mittelst der Weberschen Formel § 72, (2) ohne weiteres:

$$(7) \qquad c_3 = -\frac{\pi}{\sin 2\nu\pi};$$

setzen wir ferner $x = 0$, nachdem wir zunächst mit x^ν dividiert haben, so ergibt (Γ_{17}):

$$(8) \qquad c_1 + c_2 \cot \nu\pi = \frac{\pi}{\sin 2\nu\pi};$$

multiplizieren wir endlich mit y^2 und setzen wir y als sehr groß und positiv voraus, so ergeben die gewöhnlichen asymptotischen Ausdrücke der §§ 59 und 88:

$$(9) \qquad c_2 = \frac{\pi}{2}, \quad c_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \nu\pi,$$

ein Ergebnis, das sehr gut mit (8) übereinstimmt, und wir finden demnach endlich:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{J^\nu(tx)\, t^\nu}{(t+y)^2}\, dt = \\ & = \frac{\pi x y^\nu}{2 \cos \nu\pi} \left(\sin \nu\pi J^{\nu-1}(xy) + \cos \nu\pi\, Y^{\nu-1}(x) - \frac{\Pi^{\nu-1,-\nu}(xy)}{\sin \nu\pi} \right); \end{aligned} \right.$$

der Spezialfall $\nu = 0$ verdient besonders hervorgehoben zu werden; unter dieser Annahme finden wir nämlich die elegante Formel:

$$(11) \qquad \int_0^\infty \frac{J^0(tx)}{(t+y)^2}\, dt = \frac{\pi x}{2} \left(\Omega^1(xy) - Y^1(xy) \right).$$

Kapitel XVII.

Anwendungen der dritten und vierten Methode.

§ 93. Über die Integrale $\int\limits_0^\infty e^{-txi} C^\nu(tx) t^\varrho (t+y)^\sigma dt$ und $\int\limits_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} C^\nu(tx) t^{\varrho-1} dt$.

Als Anwendung der dritten Methode betrachten wir das Integral:

(1) $$\mathfrak{U}(xy) = \int\limits_0^\infty e^{-txi} C^\nu(tx)(tx)^\omega t^{\varrho-\omega}(t+y)^\sigma dt,$$

in Bezug auf welches der allgemeine Satz § 79, III mittelst der Differentialgleichung § 49, (5) auf die andere führt:

(2) $$\begin{cases} \mathfrak{U}^{(3)}(x) + \left(\frac{3-2\omega}{x} - 2i\right)\mathfrak{U}^{(2)}(x) + \\ + \left(\frac{(\omega-1)^2-\nu^2}{x^2} - \frac{3-2\omega-2\sigma}{x} i\right)\mathfrak{U}^{(1)}(x) + \frac{\sigma(1-2\omega)i}{x^2}\mathfrak{U}(x) = 0, \end{cases}$$

eine Gleichung, welche wir mit § 50, (22) zu vergleichen haben. Beide Gleichungen werden identisch, wenn:

$$a = -2\sigma, \quad \alpha = \omega - \sigma - 1, \quad \beta = 1,$$
$$(a-1)(1-2\alpha) = \sigma(2\omega-1),$$
$$\alpha^2 - \gamma^2 + (a-1)(1-2\alpha) = (\omega-1)^2 - \nu^2,$$
$$(a-2)(\alpha^2-\gamma^2) = 0$$

ist, so daß wir hier zwei Fälle zu untersuchen haben:

1) $a = 2, \quad \sigma = -1, \quad \alpha = \varrho = \omega, \quad \gamma = \nu, \quad \delta = -\varrho,$

2) $\alpha = \gamma = \varrho = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \delta = \sigma + \frac{3}{2}.$

Nun führt uns der zweite Fall offenbar zu dem **Hankelschen** Integrale des § 57, so daß wir nur den ersten Fall näher zu untersuchen haben.

Als Anwendung der vierten Methode betrachten wir das Integral:

(3) $$\mathfrak{V}(xy) = \int\limits_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} C^\nu(tx)(tx)^\varrho \cdot \frac{dt}{t},$$

in Bezug auf welches der allgemeine Satz § 80, IV mittelst § 49, (5) die Gleichung liefert:

(4) $$\begin{cases} \mathfrak{V}^{(3)}(x) + \frac{3-2\varrho}{x}\mathfrak{V}^{(2)}(x) + \left(\frac{(\varrho-1)^2-\nu^2}{x^2} + \frac{2i}{x}\right)\mathfrak{V}^{(1)}(x) + \\ + \frac{(1-2\varrho)i}{x^2}\mathfrak{V}(x) = 0, \end{cases}$$

welche wir mit der aus § 50, (17) für $x^{\alpha} C^{\gamma}(\sqrt{\beta x})$ erhaltenen Differentialgleichung vergleichen wollen. Beide Gleichungen werden identisch, wenn:

$$1)\ \varrho = \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\nu, \quad \delta = 1,$$

$$2)\ \alpha = \pm\gamma, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\varrho}{2} - \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{\varrho}{2} + \frac{3}{4},$$

von welchen Fällen der letztere kein besonderes Interesse bietet.

Wir haben unsere Gleichung (4) endlich noch mit § 55, (7) für $x^{\alpha} C^{\nu}(\sqrt{\beta x}) C_1^{\nu}(\sqrt{\beta x})$ zu vergleichen; die Identität dieser beiden Gleichungen erfordert die Bedingungen:

$$3)\ \alpha = \varrho = 0, \quad \beta = 2i, \quad \gamma = \nu.$$

§ 94. Verallgemeinerung eines Integrales von Sonin.

Wir betrachten zunächst das Integral § 93, (1); es ist klar, daß wir uns auf denjenigen Fall beschränken können, in welchem die unter dem Integralzeichen vorkommende Cylinderfunktion von der ersten Art ist; denn sobald dies Integral gefunden ist, führt eine Änderung des Zeichens von ν ohne Mühe zu dem allgemeinsten Integrale dieser Art. Wir haben also nur die noch unbekannten Koeffizienten in folgender Formel zu bestimmen:

$$(1) \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-txi} J^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}\, dt}{t+y} = y^{\varrho} e^{xyi} \left(c_1 J^{\nu}(xy) + c_2 \Phi^{\nu, -\varrho}(xy) \right).$$

Beachtet man, daß die Funktion $e^{-txi} J^{\nu}(tx)$ für große Werte von tx ein Glied mit unveränderlichem Zeichen enthalten muß, so erfordert die Konvergenz des Integrales offenbar, daß $\Re(\varrho) < \frac{1}{2}$, $\Re(\varrho + \nu) > -1$, also $\Re(\nu) > -\frac{3}{2}$ ist, während y nicht reell und negativ sein darf.

Um die Koeffizienten zu bestimmen, setzen wir erstens $y = 0$; die Formel § 71, (1) gibt dann ohne Schwierigkeit:

$$c_2 = \frac{\pi}{\sin \pi (\nu + \varrho)};$$

nach einer Division durch x^{ν} ergibt die Annahme $x = 0$ mittelst (Γ_{17}) $c_1 = -c_2$, und somit finden wir die elegante Formel:

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x(t+y)i} J^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}\, dt}{t+y} = \frac{\pi y^{\varrho}}{\sin \pi (\nu + \varrho)} \left(\Phi^{\nu, -\varrho}(xy) - J^{\nu}(xy) \right),$$

welche für $\varrho = 0$ noch bemerkenswerter wird.

Setzt man ferner $\varrho = \nu + n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, die also nur gleich 0 oder 1 sein darf, so findet man aus § 36, (2), daß sich das entsprechende Integral allein durch Cylinderfunktionen darstellen läßt. Der Fall $n = 1$ bietet kein besonderes Interesse, dagegen gewinnt man für $n = 0$ die Formel von Sonin[1]):

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x(t+y)i} J^\nu(tx) t^\nu \, dt}{t+y} = \frac{\pi y^\nu e^{-(\nu+\frac{1}{2})\pi i}}{2\cos\nu\pi} H_2^\nu(xy), \quad \tfrac{1}{2} > \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}.$$

Die ähnliche Annahme $\varrho = -\nu + n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, liefert mittelst § 36, (4), (14) die andere, speziellere Formel:

$$(4) \quad (-1)^{n+1} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(t+y)xi} J^n(xy)\, dt}{t+y} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{S}^n(xy) + \pi i H_2^n(xy)\right);$$

für $\nu = 0$, bez. $n = 0$ werden die beiden Formeln (3) und (4) identisch.

§ 95. Asymptotische Darstellung der Funktion $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$.

Die Formeln, welche wir im vorhergehenden Paragraphen entwickelt haben, ermöglichen uns, die asymptotische Reihe für $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ aufzustellen. Um dies zu erreichen, ist es bequem, in § 94, (2) das Zeichen von ν zu ändern; die Definition § 4, (4) gibt dann nach einer einfachen Rechnung folgende allgemeinere Formel:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{H_2^\nu(tx) e^{-txi} t^\varrho}{t+y} dt = \\ & = \frac{\pi y^\varrho e^{i(xy+(\nu+\frac{1}{2})\pi)}}{\sin\pi(\varrho+\nu)\sin\pi(\varrho-\nu)} \Big(2\cos\varrho\pi\, \Phi^{\nu,-\varrho}(xy) - \\ & \qquad - (\cos\varrho\pi + \cos\nu\pi e^{-(\varrho+\nu)\pi i}) J^\nu(xy) + \\ & \qquad + e^{-\nu\pi i}\sin\pi(\nu+\varrho) Y^\nu(xy) \Big), \end{aligned} \right.$$

wo man also $\Re(xi) > 0$ und $\Re(\varrho \pm \nu) > -1$ voraussetzen muß.

Wendet man nun die Identität:

$$\frac{1}{t+y} = \frac{1}{y} - \frac{t}{y^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{y^n} + \frac{(-1)^n t^n}{y^n(t+y)}$$

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 65; 1880.

an und bezeichnet man mit f_ϱ das Integral linker Hand in (1), so findet man mittelst § 71, (4):

$$(2)\qquad f_\varrho = \frac{2y^\varrho e^{\frac{\varrho+1}{2}\pi i}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \Gamma(\varrho+\nu+s+1)\Gamma(\varrho-\nu+s+1)}{\Gamma(\varrho+s+\frac{1}{2})(2xyi)^{\varrho+s+1}} + R_n,$$

wo man der Kürze halber:

$$(3)\qquad R_n = \frac{(-1)^n}{y^n}\int\limits_0^\infty \frac{H_2^\nu(tx)\, e^{-txi}\, t^{\varrho+n}}{t+y}\, dt = \frac{(-1)^n}{y^n} \cdot f_{\varrho+n}$$

gesetzt hat.

Nimmt man nun an, daß r eine sehr große und positive Zahl bedeutet, während $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}$ ist, so darf man in (2) $x = rie^{\varphi i}$ und $y = -ie^{(\theta-\varphi)i}$ setzen; transformiert man endlich das Integral in (3) mittelst der Substitution rt für t, so erkennt man, daß:

$$\lim_{r=+\infty} (r^n R_n) = 0$$

sein muß. Damit ist aber folgender allgemeine Satz bewiesen:

Die asymptotische Reihenentwicklung:

$$(4)\qquad \begin{cases} e^{xi}\Big[2\cos\varrho\pi\,\Phi^{\nu,\varrho}(x) - (\cos\varrho\pi + \cos\nu\pi)\, e^{(\varrho-\nu)\pi i} J^\nu(x) + \\ \qquad\qquad + e^{-\nu\pi i}\sin\pi(\nu-\varrho)\, Y^\nu(x)\Big] \sim \\ \sim 2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} \cdot \dfrac{\sin\pi(\nu-\varrho)\sin\pi(\nu+\varrho)}{\sqrt{\pi^3}} \cdot \\ \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\Gamma(\nu-\varrho+s+1)\Gamma(-\nu-\varrho+s+1)}{\Gamma(-\varrho+s+\frac{3}{2})(2xi)^{-\varrho+s+1}} \end{cases}$$

ist für $\Re(\varrho \pm \nu) < 1$ *in der durch die Formeln:*

$$(5)\qquad x = re^{i\theta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

definierten ganzen Ebene anwendbar.

Wenn ν und ϱ der vorhergehenden Bedingung nicht genügen, kann man immer eine positive ganze Zahl p so bestimmen, daß $\Re(\varrho \pm \nu - p) < 1$ ist, und dann die Reduktionsformel § 35, (6) anwenden.

Im ganzen ist die Entwicklung (4) eine ziemlich allgemeine; setzt man z. B. $\varrho = p + \frac{1}{2}$, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, so erhält man, falls $n > p$ ist, die schon in § 58 gegebene asymptotische Reihe für $H_2^\nu(x)$. Setzt man weiter in (4) $\varrho = 0$,

$\nu = \pm \frac{1}{2}$ und $-ix^2$ für x, so findet man für das Integral von Kramp folgende asymptotische Reihe:

$$e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2}\, dx \sim \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2s)!}{s!\,(2x)^{2s+1}}, \tag{6}$$

welche von Weber[1]) gefunden worden ist.

§ 96. Integralausdrücke für die Hankelschen Cylinderfunktionen.

Wir wenden uns nunmehr zu dem Integrale § 93, (3) und finden im ersten Falle eine Formel von der Art:

$$\int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} J^\nu(tx)\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(c_1 J^{2\nu}(2\sqrt{2xyi}) + c_2 \mathrm{X}^{2\nu}(2\sqrt{2xyi}) \right); \tag{1}$$

denn es ist offenbar, daß der Ausdruck rechter Hand nicht eine Cylinderfunktion der zweiten Art enthalten kann; übrigens ist das Integral im allgemeinen konvergent, wenn $x > 0$ und $\Re(y) > 0$ vorausgesetzt wird; in dem Spezialfalle $\Re(y) = 0$ muß man noch $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$ annehmen.

Die zwei Koeffizienten c_1 und c_2 lassen sich auf die gewöhnliche Weise bestimmen, so daß wir endlich folgende Formel gewinnen:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} J^\nu(tx)\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\sqrt{y} \cos \nu\pi} \left(J^{2\nu}(2\sqrt{2xyi}) - \frac{e^{(\nu - \frac{1}{2})\pi i}}{\sin \nu\pi} \mathrm{X}^{2\nu}(2\sqrt{2xyi}) \right); \end{aligned} \right. \tag{2}$$

setzt man nun hier ν gleich der positiven ganzen Zahl n, so findet man aus § 17, (25) die speziellere Formel:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} J^n(tx)\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}\, i^n}{\sqrt{y}} \left(J^{2n}(2\sqrt{2xyi}) + i\, \Omega^{2n}(2\sqrt{2xyi}) \right), \end{aligned} \right. \tag{3}$$

---

1) Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik Bd. I, p. 60; Braunschweig 1900.

während die Annahme $\nu = n + \frac{1}{2}$ mittelst § 17, (26) die ähnliche Formel liefert:

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} J^{n+\frac{1}{2}}(tx)\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \\ \displaystyle = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} i}}{\sqrt{y}} \left(S^{2n+1}(2\sqrt{2xyi}) + \pi\, Y^{2n+1}(2\sqrt{2xyi})\right). \end{cases}$$

Um das (2) entsprechende Integral mit der allgemeinen Cylinderfunktion zu bestimmen, hat man nur in (2) das Zeichen von ν zu ändern; auf diese Weise findet man zum Beispiel die bemerkenswerte Formel:

$$(5)\qquad 2 e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_1^{2\nu}(2\sqrt{2xyi}) = \sqrt{\frac{y}{\pi}} \int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} H_1^{\nu}(tx)\, t^{-\frac{3}{2}}\, dt,$$

wo x nur der allgemeineren Bedingung $\Re(xi) < 0$ genügen muß. Eine Anwendung von § 5, (6) gibt ohne Mühe die ähnliche Formel mit $H_2^\nu(x)$.

§ 97. Verallgemeinerung eines Doppelintegrales von Meissel.

Wenden wir uns endlich zum dritten Falle, so finden wir eine Formel von folgender Gestalt:

$$\int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} C^\nu(tx) \cdot \frac{dt}{t} =$$

$$= c_1 \left(J^\nu(\sqrt{2xyi})\right)^2 + c_2 J^\nu(\sqrt{2xyi})\, Y^\nu(\sqrt{2xyi}) + c_3 \left(Y^\nu(\sqrt{2xyi})\right)^2,$$

wo im allgemeinen die Bedingungen $\Re(xi) < 0$, $\Re(y) > 0$ befriedigt werden müssen; y darf im allgemeinen nicht rein imaginär angenommen werden.

Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem die im Integrale vorkommende Cylinderfunktion von der ersten Art ist; die Annahme $y = 0$ ergibt dann mittelst § 71, (1) unmittelbar:

$$c_3 = 0, \qquad c_2 = -\pi e^{\frac{\nu\pi i}{2}},$$

während sich c_1 durch Division mit x^ν für $x = 0$ bestimmen läßt. Wir finden somit die Formel:

$$(1)\quad \int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} J^\nu(tx) \cdot \frac{dt}{t} = \pi e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} J^\nu(\sqrt{2xyi})\, H_1^\nu(\sqrt{2xyi}).$$

Ändern wir nun weiter das Zeichen von ν, so erhalten wir vermöge § 3, (3) und § 4, (2) die allgemeine Formel:

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{txi - \frac{y}{t}} C^\nu(tx) \cdot \frac{dt}{t} = \pi e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} C^\nu(\sqrt{2xyi})\, H_1^\nu(\sqrt{2xyi}),$$

die in der Tat höchst merkwürdig ist.

Wir betrachten speziell den Fall, in welchem die im Integrale (2) vorkommende Cylinderfunktion $H_2^\nu(x)$ ist, und finden dann, nachdem wir zuerst $-xi:2$ für x gesetzt haben, folgende elegante Formel:

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{\frac{tx}{2} - \frac{y}{t}} H_2^\nu\left(-\frac{txi}{2}\right) \cdot \frac{dt}{t} = \pi e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}\left(\left(J^\nu(\sqrt{xy})\right)^2 + \left(Y^\nu(\sqrt{xy})\right)^2\right),$$

so daß eine Anwendung des in § 57, Formel (15) gegebenen Integralausdruckes für $H_2^\nu(x)$ folgendes einfache Doppelintegral liefert:

$$(4) \qquad \begin{cases} \left(J^\nu(\sqrt{xy})\right)^2 + \left(Y^\nu(\sqrt{xy})\right)^2 = \\ = \dfrac{2x^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\sqrt{\pi^3}} \cdot \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-tx-uy}\, t^{\nu-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} (1+tu)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt\, du, \end{cases}$$

wo wir $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$, $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ annehmen müssen.

In dem speziellen Falle $\nu = 0$ finden wir das Doppelintegral von Meissel[1]), welches sicher die erste analytische Darstellung von dem Produkte zweier Cylinderfunktionen ist.

Wenden wir nun wieder die gewöhnliche Methode für die Entwicklung in eine asymptotische Reihe an, so gewinnen wir ohne Mühe mittelst (Γ_{14}) die Formel:

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(J^\nu(\sqrt{xy})\right)^2 + \left(Y^\nu(\sqrt{xy})\right)^2 \sim \\ \sim \dfrac{2}{\pi\sqrt{xy}}\left(1 + \displaystyle\sum_{s=1}^{s=n} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2s)}\cdot\right. \\ \left. \cdot\dfrac{\left(\nu^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\nu^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\nu^2 - \left(\frac{2s-1}{2}\right)^2\right)}{(xy)^s}\right), \end{cases}$$

1) Gewerbeschulprogramm Iserlohn 1862; Citat von Meissel: Jahresbericht der Oberrealschule Kiel, 1890, p. 1.

die also jedenfalls anwendbar ist, wenn die oben gestellten Bedingungen erfüllt sind. Einem Satze von Poincaré[1]) zufolge kann aber die asymptotische Reihe (5) auch unmittelbar durch eine einfache Multiplikation der beiden asymptotischen Reihen § 58, (10), (11) gefunden werden; da außerdem die Entwicklung in eine asymptotische Reihe immer eindeutig sein muß, gibt (5) uns ein einfaches Mittel zur Bestimmung der neuen Koeffizienten. Wir haben somit den Satz bewiesen:

Die asymptotische Reihe:

$$(6)\quad \begin{cases} \left(J'(x)\right)^2 + \left(Y'(x)\right)^2 \sim \\ \sim \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2s} \cdot \right. \\ \left. \frac{\left(\nu^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\nu^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\cdots\left(\nu^2-\left(\frac{2s-1}{2}\right)^2\right)}{x^{2s+1}}\right) \end{cases}$$

ist für jeden endlichen Wert von ν und in der ganzen durch die Bedingung:

$$x = |x|e^{i\theta}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

für x bestimmten Ebene anwendbar.

Wir bemerken noch, daß die Formeln § 3, (3), (4) deutlich zeigen, daß die Funktion linker Hand in (6) eine in ν *gerade* Funktion sein muß.

Kapitel XVIII.

Diskontinuierliche Faktoren.

§ 98. Anwendungen der Residuenrechnung.

Schon Hankel[2]) hat einige sehr einfache Anwendungen der Residuenrechnung von Cauchy auf gewisse bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen gegeben. Indem wir uns auf die vorhergehende Theorie dieser Funktionen stützen, werden wir hier ähnliche Untersuchungen, aber in weit allgemeinerem Sinne aufnehmen

1) Acta Mathematica Bd. 8, p. 298; 1886.
2) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 458 ff.; 1875.

und ihre Anwendungen auf die Theorie der diskontinuierlichen Faktoren im allgemeinen wenigstens andeuten, in gewissen Fällen aber vollständig durchführen, indem wir die Ergebnisse des Kapitel XIII verallgemeinern.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Funktion $f(t)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) In der Halbebene oberhalb der reellen Achse hat $f(t)$ von endlichen singulären Stellen nur diskrete Pole von endlicher Ordnung, deren Residuen sämtlich gleich Null sind.

2) Auf der reellen Achse selbst darf $f(t)$ wohl singuläre Stellen besitzen, aber nur solche, daß das Integral:

$$(1) \qquad \int_a^b f(t)\, t^\varrho\, dt,$$

wo a und b willkürliche reelle endliche Größen bedeuten, konvergiert oder divergiert, je nachdem:

$$(2) \qquad \Re(\varrho) \gtrless r - 1$$

vorausgesetzt wird, wo r eine reelle und endliche Größe bedeutet.

3) Was endlich die Werte von sehr großem absolutem Betrage und mit nicht negativen imaginären Komponenten betrifft, so hat man immer einen asymptotischen Ausdruck von folgender Form:

$$(3) \qquad e^{-tyi} \cdot f(t) \sim t^\omega (K + L e^{-2tyi}),$$

wo ω und y, K und L reelle endliche Größen bezeichnen, von welchen y positiv angenommen werden muß.

Wir konstruieren nun mit dem Ursprung als Zentrum und mit dem sehr großen Radius R einen oberhalb der reellen Achse belegenen Halbkreis, welcher keinen der obenerwähnten Pole von $f(t)$, falls solche existieren, passieren darf. Hat $f(t)$ noch reelle singuläre Stellen, so schneiden wir diese durch sehr kleine Halbkreise mit den betreffenden Punkten als Mittelpunkten aus; auf solche Weise verfahren wir jedenfalls immer mit dem Ursprung. Die in positiver Richtung durchlaufene Begrenzungslinie des so definierten Bereiches bezeichnen wir der Kürze halber mit $\mathfrak{A}$.

Bedeutet nun weiter x eine positive endliche Größe und u eine komplexe Zahl, die innerhalb der Begrenzungslinie $\mathfrak{A}$ abgebildet wird, ohne mit einem der eventuellen Pole von $f(t)$ zusammenzufallen, so hat man der Cauchyschen Fundamentalformel zufolge die Identität:

$$(4) \qquad \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(t)\, H_1^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}}{t^2 - u^2}\, dt = \pi i f(u)\, H_1^{\nu}(xu)\, u^{\varrho - 1},$$

denn $t = u$ ist ja der einzige im Innern von $\mathfrak{A}$ sich befindende Pol, welcher ein Residuum besitzt. Setzt man nun weiter:

$$(5) \qquad \Re(\varrho \pm \nu - r) > 0$$

voraus, so darf man die kleinen Halbkreise mit dem Mittelpunkte in der reellen Achse ganz weglassen, und das Integral linker Hand läßt sich also folgendermaßen schreiben:

$$(6) \qquad \int_{-R}^{+R} \frac{f(t)\, H_1^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}}{t^2 - u^2}\, dt + i R^{\varrho + 1} \cdot \int_0^{\pi} \frac{f(Re^{i\theta})\, H_1^{\nu}(xRe^{i\theta})\, e^{(\varrho + 1)\theta i}}{R^2 e^{2\theta i} - u^2}\, d\theta,$$

wo der erste Integrationsweg also mit einem Teile der reellen Achse zusammenfällt.

Läßt man nun R unbegrenzt wachsen, so konvergiert das erste Integral in (5) der Bedingung (3) zufolge im allgemeinen, wenn:

$$(7) \qquad x > y, \quad \Re(\varrho + \omega) < \tfrac{5}{2}$$

oder im besondern:

$$(7\text{a}) \qquad x = y, \quad \Re(\varrho + \omega) < \tfrac{3}{2};$$

unter denselben Bedingungen (7) und (7a) verschwindet das zweite Integral (6), also findet man aus (4), wenn man iu für u einführt, die Formel:

$$(8) \qquad V \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\, H_1^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}}{t^2 + u^2}\, dt = \pi i^{\varrho} f(ui)\, H_1^{\nu}(xui)\, u^{\varrho - 1}.$$

Entfernt man in diesem Integrale den Nenner $t^2 + u^2$, so findet man durch dieselben Überlegungen die weitere Formel:

$$(9) \qquad \mathfrak{V} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, H_1^{\nu}(tx)\, t^{\varrho}\, dt = 0,$$

welche anwendbar ist, wenn im allgemeinen:

$$(10) \qquad x > y, \quad \Re(\varrho + \omega) < \tfrac{1}{2}$$

oder im besondern:

$$(10\text{a}) \qquad x = y, \quad \Re(\varrho + \omega) < -\tfrac{1}{2}$$

vorausgesetzt wird, während übrigens noch die Bedingung (5) erfüllt sein muß.

Es leuchtet ein, daß man auf ganz ähnliche Weise diejenigen Integrale behandeln kann, welche aus (8) durch Hinzufügung mehrerer Faktoren:

$$t^2 + u_1^2, \quad t^2 + u_2^2, \quad \cdots$$

im Nenner gebildet werden.

Wie sich aber die zwei Integrale (8) und (9) verhalten, wenn $x < y$ vorausgesetzt wird, wissen wir nicht; im allgemeinen können wir nur sagen, daß sie in diesem Falle ganz andere Funktionen darstellen, wenn sie überhaupt einen Sinn haben, und daß diese Funktionen sicher viel komplizierter sind; zu ihrer Bestimmung besitzen wir aber im allgemeinen hier kein Mittel. Unsere zwei Integrale stellen also im allgemeinen diskontinuierliche Faktoren im Sinne Dirichlets dar.

Setzen wir ferner voraus, daß eine zweimalige Differentiation nach x unter dem Integralzeichen in (8) erlaubt ist, so finden wir für V die Differentialgleichung:

(11) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \left(u^2 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) V = -\mathfrak{V},$$

so daß wir den Satz bewiesen haben:

Falls die obenerwähnte zweimalige Differentiation erlaubt ist, stellt das Integral V immer einen diskontinuierlichen Faktor dar, wenn dies mit $\mathfrak{V}$ der Fall ist.

§ 99. Spezialisierungen der allgemeinen Formeln.

Ehe wir zur wirklichen Anwendung der Formeln § 98, (8), (9) schreiten, wollen wir über die Funktion $f(t)$ eine neue Voraussetzung machen, welche uns bemerkenswerte Umformungen der obenerwähnten Formeln erlaubt. Nehmen wir an, daß:

(1) $$f(te^{\pi i}) = e^{\lambda \pi i} f(t)$$

ist, und setzen wir in den obenerwähnten Formeln:

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{-\infty},$$

so läßt sich das letzte der neuen Integrale durch die Substitution $te^{\pi i}$ für t mittelst (1) und § 5, (5) umformen, so daß § 98, (8) folgende Formel liefert:

$$
(3)\quad \begin{cases} \sin\frac{\pi}{2}(\lambda-\nu+\varrho)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{f(t)J^\nu(tx)t^\varrho}{t^2+u^2}\,dt - \\ \qquad -\cos\frac{\pi}{2}(\lambda-\nu+\varrho)\cdot\int\limits_0^\infty \frac{f(t)Y^\nu(tx)t^\varrho}{t^2+u^2}\,dt = \\ \qquad\qquad = \frac{\pi}{2}e^{(\nu-\lambda+1)\frac{\pi i}{2}}\cdot f(ui)H_1^\nu(xui)u^{\varrho-1}. \end{cases}
$$

Die Formel § 98, (9) ergibt dagegen die bemerkenswerte Identität:

$$
(4)\quad \begin{cases} \sin\frac{\pi}{2}(\lambda-\nu+\varrho)\int\limits_0^\infty f(t)J^\nu(tx)t^\varrho\,dt = \\ \qquad = \cos\frac{\pi}{2}(\lambda-\nu+\varrho)\cdot\int\limits_0^\infty f(t)Y^\nu(tx)t^\varrho\,dt, \end{cases}
$$

welche zu den Cauchyschen Identitäten in § 17 und den Formeln § 73, (11), (12) ganz analog ist.

Von diesen allgemeinen Formeln (3) und (4) betrachten wir noch folgende zwei Spezialfälle näher:

1) $\varrho=\nu-\lambda+2n+1$, wo n eine ganze Zahl bedeutet; wir finden:

$$
(5)\quad \int\limits_0^\infty \frac{f(t)J^\nu(tx)t^{\nu-\lambda+2n+1}}{t^2+u^2}\,dt = (-1)^n\frac{\pi}{2}\cdot e^{(\nu-\lambda+1)\frac{\pi i}{2}}\cdot f(ui)H_1^\nu(xui)u^{\nu-\lambda+2n},
$$

$$
(6)\quad \int\limits_0^\infty f(t)J^\nu(tx)t^{\nu-\lambda+2n+1}\,dt = 0,
$$

für welche Formeln sich die Bedingung § 98, (5) so schreiben läßt:

$$
(7)\quad \Re(2\nu-\lambda-r) > -2n-1.
$$

2) $\varrho=\nu-\lambda+2n$; man findet hier:

$$
(8)\quad \int\limits_0^\infty \frac{f(t)Y^\nu(tx)t^{\nu-\lambda+2n}\,dt}{t^2+u^2} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{(\nu-\lambda+1)\frac{\pi i}{2}}f(ui)H_1^\nu(xui)u^{\nu-\lambda+2n-1},
$$

$$
(9)\quad \int\limits_0^\infty f(t)Y^\nu(tx)t^{\nu-\lambda+2n}\,dt = 0.
$$

Die vier letzten spezielleren Formeln lassen sich unmittelbar auf den Fall:

$$
(10)\quad f(t)=J^\lambda(ty),\quad \text{also}\quad \omega=-\tfrac{1}{2},\quad r=-\lambda-1
$$

anwenden. Die so aus (6) und (9) erhaltenen Formeln sind offenbar eine unmittelbare Folge von § 73, (11), (12). Die zwei entsprechenden Integrale für $y > x$ lassen sich mittelst § 73, (11), (13) durch hypergeometrische Funktionen darstellen. Eine Anwendung des Satzes in § 98 liefert dann unmittelbar das speziellere Resultat:

Unter der Annahme von (10) *stellen auch die Integrale* (5) *und* (8) *diskontinuierliche Faktoren dar, indem sie verschiedene Funktionen darstellen müssen, je nachdem* $x \geqq y$ *oder* $x < y$ *angenommen wird.*

Nach diesen allgemeineren Erörterungen wenden wir uns nunmehr zu den direkten Anwendungen unserer gewonnenen Resultate, indem wir einige interessante Formeln von Sonin zu verallgemeinern suchen.

§ 100. Verallgemeinerungen eines Fundamentalintegrales von Sonin.

Offenbar ist die Annahme:

$$f(t) = \frac{J^{\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}}, \tag{1}$$

wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, erlaubt und gibt folgende spezielleren Werte der Konstanten λ, r und ω:

$$\lambda = r = 0, \quad \omega = -(\sigma - 2p + \tfrac{1}{2}), \tag{2}$$

so daß die Formel § 99, (6) ergibt:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{J^{\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} J^{\nu}(tx)\, t^{\nu+2n+1}\, dt = 0, \tag{3}$$

eine Formel, welche also anwendbar ist, falls im allgemeinen:

$$x > y, \quad \Re(\nu+n) > -1, \quad \Re(\sigma-\nu) > 2n+2p \tag{4}$$

oder im besonderen:

$$x = y, \quad \Re(\nu+n) > -1, \quad \Re(\sigma-\nu) > 2n+2p+1 \tag{4a}$$

vorausgesetzt wird.

Ganz auf dieselbe Weise führt § 99, (9) zu folgender ähnlichen Formel:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{J^{\sigma}(y\sqrt{t^2+z^2})}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} Y^{\nu}(tx)\, t^{\nu+2n}\, dt = 0, \tag{5}$$

wo man im allgemeinen:

(6) $x > y,\quad \Re(\nu + n) > -1,\quad \Re(\sigma - \nu) > 2n + 2p - 1,\quad n \geqq 0$

oder im besondern:

(6a) $x = y,\quad \Re(\nu + n) > -1,\quad \Re(\sigma - \nu) > 2n + 2p,\qquad n > 0$

annehmen muß.

Setzt man speziell in (3) $n = p = 0$, so erhält man eine Formel, welche von Sonin[1]) durch eine ganz andere Methode gefunden worden ist.

Sucht man nun weiter das Integral:

$$U = \int\limits_0^\infty \frac{C^\sigma(y\sqrt{t^2 + z^2})}{(t^2 + z^2)^{\frac{\sigma}{2} - p}}\, C_1^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt,$$

zu bestimmen, wo $y > x$ vorausgesetzt wird, so empfiehlt es sich sehr, mit Sonin[2]) folgende Transformation:

$$t = \sqrt{t_1^2 - z^2}$$

anzuwenden; z wird als reell und positiv vorausgesetzt. Das Integral U läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$U = \int\limits_z^\infty \frac{C^\sigma(ty)}{t^{\sigma - 2p - 1}} \cdot C_1^\nu\left(x\sqrt{t^2 - z^2}\right)(t^2 - z^2)^{\frac{\varrho - 1}{2}}\, dt,$$

so daß die Formel § 86, (6) uns natürlich dazu führt, in diesem Integrale:

$$C^\sigma(x) = H_1^\sigma(x),\quad C_1^\nu(x) = J^\nu(x),\ p = 0$$

zu setzen. Substituiert man nun in dem so erhaltenen Integrale für $J^\nu(x)$ ihre gewöhnliche Reihenentwicklung, so ist die gliedweise Integration erlaubt, falls die dadurch erhaltene Reihe wieder gleichmäßig konvergent ist.[3]) Nun liefert die obenerwähnte Formel folgende Reihenentwicklung:

$$(7)\quad U = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s\, \Gamma\left(\frac{\varrho + \nu + 1}{2} + s\right) x^{\nu + 2s} z^{\frac{\nu + \varrho + 1}{2} + s - \sigma}}{s!\, \Gamma(\nu + s + 1) \cdot 2^{\frac{\nu - \varrho + 1}{2} + s} \cdot y^{\frac{\nu + \varrho + 1}{2} + s}} \cdot H_1^{\sigma - s - \frac{\nu + \varrho + 1}{2}}(yz),$$

welche in der Tat, wie die Taylorschen Reihen des § 10 deutlich zeigen, unbedingt konvergiert, falls nur $y > x$ vorausgesetzt wird.

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 38; 1880. 2) loc. cit. p. 38.

3) U. Dini: Grundlagen etc. p. 524; Leipzig 1892.

Denkt man sich nun für den Augenblick x, y und z positiv, während ν, ϱ und σ nur reell zu sein brauchen, so müssen die reellen und die imaginären Komponenten der beiden Seiten in (7) einander gleich sein; also darf man in dieser Formel statt der Hankelschen Cylinderfunktion eine willkürliche Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter σ einführen und findet somit folgende allgemeinere Formel:

$$(8)\begin{cases}\displaystyle\int_z^\infty \frac{C^\sigma(tx)}{t^{\sigma-1}}\cdot J^\nu\left(x\sqrt{t^2-z^2}\right)(t^2-z^2)^{\frac{\varrho-1}{2}}\,dt = \\ \displaystyle = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}+s\right)x^{\nu+2s}\,z^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}+s-\sigma}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)\,2^{\frac{\nu-\varrho+1}{2}+s}\,y^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}+s}}\,C^{\sigma-s-\frac{\nu+\varrho+1}{2}}(yz).\end{cases}$$

Weiter ist offenbar, daß sich die unendliche Reihe rechter Hand in (8) unter endlicher Form summieren läßt, wenn man $\nu+1=\varrho$ einführt; die Formel § 10, (7) ergibt nämlich in diesem Falle unmittelbar:

$$(9)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_z^\infty \frac{C^\sigma(ty)}{t^{\sigma-1}}\cdot J^\nu\left(x\sqrt{t^2-z^2}\right)(t^2-z^2)^{\frac{\nu}{2}}\,dt = \\ \displaystyle\qquad = \frac{x^\nu}{y^\sigma}\left(\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{z}\right)^{\sigma-\nu-1} C^{\sigma-\nu-1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right),\end{cases}$$

wo man:

(9a) $\qquad y > x,\quad \Re(\nu) > -1,\quad \Re(\sigma-\nu) > 0$

annehmen muß.

Aus der allgemeinen Formel (9) läßt sich nun sehr leicht eine große Menge anderer herleiten. Denkt man sich zum Beispiel die willkürliche Cylinderfunktion mit dem Parameter σ durch $H_1^\sigma(ty)$ ersetzt und ändert man das Vorzeichen von σ, so erhält man aus § 4, (2) die neue Integralformel:

$$(10)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_z^\infty H_1^\sigma(ty)\,t^{\sigma+1}J^\nu\left(x\sqrt{t^2-z^2}\right)(t^2-z^2)^{\frac{\nu}{2}}\,dt = \\ \displaystyle\qquad = x^\nu y^\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)^{\sigma+\nu+1} H_1^{\nu+\sigma+1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right)\cdot e^{(\nu+1)\pi i},\end{cases}$$

die also anwendbar ist, falls:

(10a) $\qquad y > x,\quad \Re(\nu+\sigma) < 0,\quad \Re(\nu) > -1$

angenommen wird.

Setzt man nun wieder in den Formeln (8) und (9) $t = \sqrt{t_1^2 + z^2}$, so findet man:

$$
(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{C^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}}} J^\nu(tx)\, t^\varrho\, dt = \\ \displaystyle = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\varrho+\nu+1}{2}+s\right) x^{\nu+2s} z^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}+s-\sigma}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)\, 2^{\frac{\nu-\varrho+1}{2}+s}\, y^{\frac{\nu+\varrho+1}{2}+s}} C^{\sigma-s-\frac{\nu+\varrho+1}{2}}(yz), \end{cases}
$$

$$
(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{C^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}}} J^\nu(tx)\, t^{\nu+1}\, dt = \\ \displaystyle \qquad = \frac{x^\nu}{y^\sigma}\left(\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{z}\right)^{\sigma-\nu-1} C^{\sigma-\nu-1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right). \end{cases}
$$

Vergleicht man nun weiter in (10) die reellen und die imaginären Komponenten der beiden Seiten, so ergibt dieselbe Substitution die zwei weiteren Formeln:

$$
(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^\infty J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}} J^\nu(tx)\, t^{\nu+1}\, dt = \\ \displaystyle = x^\nu y^\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)^{\sigma+\nu+1}\Big(\sin\nu\pi\, Y^{\nu+\sigma+1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right) - \\ \qquad\qquad - \cos\nu\pi\, J^{\nu+\sigma+1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right)\Big), \end{cases}
$$

$$
(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^\infty Y^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}} J^\nu tx)\, t^{\nu+1}\, dt = \\ \displaystyle = x^\nu y^\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)^{\sigma+\nu+1}\Big(\cos\nu\pi\, Y^{\nu+\sigma+1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right) + \\ \qquad\qquad + \sin\nu\pi\, J^{\nu+\sigma+1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right)\Big). \end{cases}
$$

Setzt man ferner in (11) $C^\sigma(x) = J^\sigma(x)$, $\varrho = \nu + 2n + 1$, so gewinnt man aus (3) für $p = 0$ folgenden Satz:

Das Integral:

$$
\int\limits_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}}} J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}\, dt
$$

ist ein diskontinuierlicher Faktor im Sinne Dirichlets; denn, falls im allgemeinen:

$$x > y, \quad \Re(\sigma) > \Re(\nu) > -1$$

oder im besonderen:

$$x = y, \quad \Re(\sigma - 1) > \Re(\nu) > -1$$

vorausgesetzt wird, ist das Integral gleich Null, während für $y > x$ *sein von Null verschiedener Wert aus der zugehörigen Formel* (11) *zu bestimmen ist.*

Dies Resultat ist für $n = 0$ von Sonin[1]) gefunden worden. Betrachten wir nun diesen Spezialfall näher, so finden wir für $z = 0$ die Formeln § 75, (1), (2) wieder, während die weitere Annahme $\sigma = \nu + 1$ auf § 75, (9) führt, so daß der diskontinuierliche Faktor von Sonin eine sehr weitreichende Verallgemeinerung desjenigen von Dirichlet und Weber darstellt.

Aus (9) finden wir weiter für $x = 0$, nachdem man x^ν weggenommen und $\sigma = \pm \frac{1}{2}$ gesetzt hat, die Formeln § 86, (11), (12) von Mehler und Weber.

Die Formel (10) liefert in ähnlicher Weise, wenn wir $\sigma = \mp \frac{1}{2}$, iy für y und $\nu - \frac{1}{2}$, bez. $\nu - \frac{3}{2}$ für ν setzen, die weiteren Formeln:

$$(15) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_z^\infty J^{\nu - \frac{1}{2}}\left(x\sqrt{t^2 - z^2}\right) \left(\frac{t^2 - z^2}{x^2}\right)^{\frac{2\nu - 1}{4}} e^{-yt}\, dt = \\ \displaystyle\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{-\frac{\nu}{2}} H_1^\nu\left(iz\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{\frac{\nu + 1}{2}\pi i}, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_z^\infty J^{\nu - \frac{3}{2}}\left(x\sqrt{t^2 - z^2}\right) \left(\frac{t^2 - z^2}{x^2}\right)^{\frac{2\nu - 3}{4}} e^{-yt}\, t\, dt = \\ \displaystyle\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{-\frac{\nu}{2}} H_1^\nu\left(iz\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{\frac{\nu + 1}{2}\pi i} \cdot y, \end{cases}$$

von welchen Sonin[2]) die erstere auf ganz andere Weise gefunden hat. Setzen wir noch in diesen Formeln $x = 0$, so erhalten wir zwei neue Integraldarstellungen für die erste Hankelsche Cylinderfunktion $H_1^\nu(yzi)$.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 38; 1890.

2) loc. cit. p. 55.

§ 101. Verallgemeinerungen anderer Integrale von Sonin.

Wir haben noch die allgemeineren Formeln § 99, (5), (8) in Übereinstimmung mit unserer im vorigen Paragraphen gemachten Annahme über $f(t)$ zu modifizieren und finden ohne Schwierigkeit die zwei Formeln:

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot \frac{J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}}{t^2+u^2}\, dt = \\ \displaystyle\qquad = (-1)^n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{z^2-u^2}\right)}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot H_1^\nu(xui)\, u^{\nu+2n} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}, \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot \frac{Y^\nu(tx)\, t^{\nu+2n}}{t^2+u^2}\, dt = \\ \displaystyle\qquad = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{z^2-u^2}\right)}{(z^2-u^2)^{\frac{\sigma}{2}-p}} \cdot H_1^\nu(xui)\, u^{\nu+2n-1} \cdot e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}, \end{cases}$$

von welchen die erste für $n = p = 0$ durch andere Methoden von Sonin[1]) gefunden worden ist.

Setzen wir nun in (1) und (2) $u = z$, was offenbar erlaubt ist, wenn nur die übrigen Bedingungen erfüllt sind, so finden wir in den beiden Formeln rechter Hand den Ausdruck Null, falls $p > 0$ angenommen wird; für $p = 0$ bekommen wir dagegen die zwei neuen Formeln:

$$\text{(3)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}+1}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu+2n+1}\, dt = \\ \displaystyle\qquad = (-1)^n \frac{\pi y^\sigma z^{\nu+2n}}{2^{\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)} \cdot H_1^\nu(xzi)\, e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}, \end{cases}$$

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}+1}} \cdot Y^\nu(tx)\, t^{\nu+2n}\, dt = \\ \displaystyle\qquad = (-1)^{n-1} \frac{\pi y^\sigma z^{\nu+2n-1}}{2^{\sigma+2}\Gamma(\sigma+1)} \cdot H_1^\nu(xzi)\, e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i}, \end{cases}$$

1) loc. cit. p. 59; 1880.

von welchen die erste für $n = 0$ ebenfalls von Sonin[1]) gefunden worden ist.

Wir haben noch einen anderen Spezialfall von (1) und (2) zu untersuchen, den wir erhalten, indem wir $u = 0$ setzen; wenn $n > 0$ und $\Re(\nu) > -n$, bez. $\Re(\nu) > -n - \frac{1}{2}$, so haben die zwei neuen Integrale beide den Wert Null; für $n = 0$ erhalten wir dagegen aus (1):

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{J^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)}{x^\nu z^\varrho} \cdot J^\sigma(yz),$$

eine Formel, welche gleichfalls von Sonin[2]) aufgestellt worden ist. Das letztere Resultat kann nicht mittelst der allgemeinen Formeln hergeleitet werden, denn das entsprechende Integral mit der Hankelschen Cylinderfunktion statt $J^\nu(tx)$ muß immer divergieren.

Wir dürfen also in den Formeln von (1) bis (5) niemals y größer als x annehmen; der allgemeine Satz des § 99 ergibt indessen unter Anwendung des Satzes in § 100 den folgenden:

Das Integral (1) *ist für* $p = 0$ *ein diskontinuierlicher Faktor, weil er für* $x \geq y$ *und für* $x < y$ *zwei verschiedene Funktionen darstellt.*

Wir bemerken noch, daß sich das Integral (3) für $n = 0$ sehr leicht bestimmen läßt, wenn $x \geq y$ vorausgesetzt wird; um dies zu erreichen, braucht man nur die Formel (12) des § 100 nach z zu differentiieren; die Differentiationsformel § 10, (5) liefert dann ohne Mühe diese andere Integralformel:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{C^\sigma\left(y\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\frac{\sigma}{2}+1}} \cdot J^\nu(tx)\, t^{\nu+1}\, dt = \\ &\qquad = \frac{x^\nu}{y^{\sigma-2}} \left(\frac{\sqrt{y^2-x^2}}{z}\right)^{\sigma-\nu-1} \cdot C^{\sigma-\nu-1}\left(z\sqrt{y^2-x^2}\right), \end{aligned} \right.$$

in der man nach ausgeführter Differentiation $\sigma - 1$ für σ gesetzt hat; wenn die Cylinderfunktion $C^\sigma(x)$ von der ersten Art ist, wird der entsprechende Ausdruck (6) vollständig von dem in (3) gegebenen verschieden.

1) loc. cit. p. 50. 2) loc. cit. p. 49.

DRITTER TEIL.

ENTWICKLUNGEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN NACH CYLINDERFUNKTIONEN.

Kapitel XIX.

Entwicklung einer Fakultätenreihe. Die Reihe $\Sigma a_n x^n J^{\nu+n}(x)$.

§ 102. Allgemeine Prinzipien.

Wir setzen der Kürze halber:

$$(1)\qquad u_n = a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J^{\nu+n}(x), \quad v_n = \frac{a_n x^n}{2^n \Gamma(\nu+n+1)},$$

wo die Koeffizienten a_n für endliche n auch endliche Größen bedeuten. Denken wir uns auch x endlich, so ergibt der asymptotische Ausdruck § 2, (3) unmittelbar, daß die beiden Reihen mit positiven Gliedern:

$$(2)\qquad \Sigma\,|\,u_n\,|, \quad \Sigma\,|\,v_n\,|$$

zu gleicher Zeit konvergent oder divergent sein müssen.

Weiter setzen wir:

$$(3)\qquad \Delta = \Sigma\, u_n, \quad u_n^{(p)} = \frac{(-1)^p a_n x^{n+2p}}{2^{n+2p} p!\,\Gamma(\nu+n+p+1)},$$

und führen nun in Δ für jede Cylinderfunktion ihre Reihenentwicklung ein; die einfache Reihe Δ verwandelt sich dann in eine Doppelreihe, indem wir bekommen:

$$(4)\qquad \Delta = \begin{cases} + u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_0^{(2)} + \cdots + u_0^{(n)} + \cdots \\ + u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{(n)} + \cdots \\ + u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{(n)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + u_n^{(0)} + u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \cdots + u_n^{(n)} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{cases}$$

wo wir der Definition von Δ gemäß zuerst die horizontalen Reihen zu summieren und dann wieder die Summe dieser Summen zu bilden haben. Setzen wir indessen voraus, daß die Reihe $\Sigma\,|\,v_n\,|$ konvergent ist, so wird dasselbe auch mit $\Sigma\,|\,u_n\,|$ der Fall sein, also konvergieren die einzelnen horizontalen und vertikalen Reihen in (4) alle unbedingt, und wir können somit die Doppelreihe (4) summieren, indem wir ihre Glieder ganz willkürlich anordnen.

Durch diese Bemerkung ist ein allgemeines Prinzip angedeutet, nach welchem man für dieselbe analytische Funktion verschiedene Entwicklungen bilden kann, die nach Cylinderfunktionen fortschreiten. Pincherle[1]) hat wohl zuerst systematisch die Theorie der Doppelreihen mit solchen Entwicklungen in Verbindung gebracht.

Wir bemerken noch vorübergehend, daß sich die Reihe Σu_n sehr leicht als bestimmtes Integral darstellen läßt; um dies zu erreichen, schreiben wir die Formel 68, (8) unter der Form:

$$(5) \quad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n!} \cdot \int_0^1 J^\nu(x\sqrt{c})(1-c)^n c^{\frac{\nu}{2}}\, dc = J^{\nu+n+1}(x), \qquad \Re(\nu) > -2,$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet.

Die vorhergehende Bemerkung über die Reihen (2) zeigt aber, daß die Potenzreihe:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

überall konvergent sein muß, wo dies mit Σu_n selbst der Fall ist, und somit finden wir aus (5) die Formel:

$$(7) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n+1}(x) = \frac{x}{2} \cdot \int_0^1 J^\nu(x\sqrt{c}) f(x - cx) c^{\frac{\nu}{2}}\, dc,$$
$$\Re(\nu) > -2,$$

welche demnach überall anwendbar ist, wo die Reihe linker Hand konvergiert.

§ 103. **Entwicklung einer Fakultätenreihe mit dem Argumente ν.**

Wir ordnen nun zuerst die Glieder der Doppelreihe Δ in § 102 so, daß wir alle diejenigen, welche im Nenner dieselbe Gammafunktion haben, als ein einziges Glied ansehen. Auf diese Weise finden wir eine Identität von der Form:

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\nu+s}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{\Gamma(\nu+n+1)},$$

wo wir:

$$(2) \qquad b_s = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{s!} a_{n-s} \left(\frac{x}{2}\right)^{s+n}$$

gesetzt haben.

---

1) Memorie dell' Istituto di Bologna (4) Bd. 3; 1881.

Die Gleichungen (2) gestatten uns, die Koeffizienten b_n zu bestimmen, falls nur die a_s gegeben sind; umgekehrt ist es aber auch möglich, mittelst dieser Gleichungen die a_s zu bestimmen, falls die b_n gegeben sind und x nicht gleich Null angenommen wird. Durch unvollständige Induktion finden wir nämlich nach einer direkten Auflösung der ersten dieser Gleichungen, daß:

$$(3)\qquad a_n\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_{n-s}}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

ist, eine Formel, die wir nun durch vollständige Induktion in aller Strenge zu beweisen haben. Zu dem Ende setzen wir in (2) $n+1$ für n und suchen a_{n+1}, indem wir für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die aus (3) erhaltenen Ausdrücke einführen. Auf diese Weise finden wir aus dem Ausdrucke für a_{n+1}, daß der zu b_0 gehörige Koeffizient folgendermaßen bestimmt wird:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s-1}}{s!\,(n-s)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s-1}\binom{n}{s} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!};$$

die zu $b_1, b_2, \ldots$ gehörigen Koeffizienten lassen sich auf dieselbe Weise bestimmen, und somit ist die Formel (3) vollständig bewiesen.

Durch diese Formel (3) haben wir also die *formale* Entwicklung der Fakultätenreihe rechter Hand in (1) gegeben; es bleibt indessen noch übrig, diese Entwicklung in aller Strenge zu begründen. Zu dem Ende denken wir uns, daß die Fakultätenreihe:

$$(4)\qquad f(\nu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{\Gamma(\nu+n+1)}$$

konvergiert, falls $\Re(\nu) > \lambda$ angenommen wird, und setzen der Kürze halber:

$$t_n = \frac{b_n}{\Gamma(\nu+n+1)};$$

weiter bemerken wir, daß die gewöhnliche Reihe für $J^{\nu+n}(x)$ in Verbindung mit § 102, (1) folgende Identität liefert:

$$(5)\qquad v_n = u_n + \frac{x^2}{4(\nu+n+1)}\, v_n + \frac{k_n}{(\nu+n+1)^2},$$

wo k_n überall endlich bleibt, wo dies mit u_n der Fall ist, und wir erhalten somit aus Formel (3) die andere:

$$(6)\qquad v_n = t_n + \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s x^{2s}}{s!\,2^{2s}} \cdot \frac{t_{n-s}}{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+n-s+1)},$$

während die Formel (2) in ähnlicher Weise ergibt:

$$(7)\qquad t_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{x^{2s}}{s!\,2^{2s}} \cdot \frac{v_{n-s}}{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+n-s+1)}.$$

Nun zeigen die Formeln (6) und (7) aber deutlich, daß $|t_n|$ und $|v_n|$ zu gleicher Zeit endlich bleiben, so daß dasselbe gemäß (5) auch mit $|t_n|$ und $|u_n|$ der Fall sein muß. Bleibt also einer der absoluten Beträge $|t_n|$, $|u_n|$ oder $|v_n|$ mit unendlich wachsendem n endlich, so findet man aus (5) und (6) die weitere Formel:

$$(8)\qquad u_n = t_n + \frac{x^2}{4(\nu+n+1)}\,t_{n-1} - \frac{x^2}{4(\nu+n+1)}\,t_n + \frac{L_n}{(\nu+n)^2},$$

wo L_n eine bei unendlich wachsendem n endlich bleibende Größe bezeichnet. Setzen wir nun in (8) $n+1, n+2, \cdots, n+p$ für n, so finden wir durch Addition:

$$(9)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=p} (u_{n+s} - t_{n+s}) = \\ \displaystyle = \frac{x^2}{4(\nu+n+1)}\,t_{n-1} - \frac{x^2}{4(\nu+n+p+1)}\,t_{n+p} + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{L_{n+s}}{(\nu+n+s)^2}. \end{cases}$$

Da nun die letzte Summe rechter Hand in (9) das Restglied einer unbedingt konvergenten Reihe darstellt, haben wir bewiesen, daß für die positive ganze Zahl n ein hinlänglich großer Wert N gefunden werden kann, so daß:

$$(10)\qquad \left| \sum_{s=1}^{s=p} (u_{n+s} - t_{n+s}) \right| < \varepsilon, \qquad n \geqq N$$

wird, wo ε eine vorgegebene positive Größe von willkürlicher Kleinheit bedeutet; mit andern Worten, wir haben bewiesen, daß die Fakultätenreihe (4) und die durch (1) und (3) bestimmte Cylinderfunktionenreihe denselben Konvergenzbereich haben müssen.

Definiert man nun mittelst (3) die Koeffizienten a_n, so muß die Reihe linker Hand in (1) überall konvergent sein, wo dies mit der Fakultätenreihe $f(\nu)$ der Fall ist, und diese Cylinderfunktionenreihe gibt umgekehrt mittelst (2) genau die gegebene Fakultätenreihe $f(\nu)$, so daß wir also den Satz bewiesen haben:

I. *Wenn das Argument x eine von Null verschiedene endliche Größe bedeutet, kann die Fakultätenreihe:*

$$f(\nu) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{\Gamma(\nu+n+1)}$$

nach Cylinderfunktionen entwickelt werden, so daß:

$$f(\nu) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x)$$

ist, wo sich die Koeffizienten a_n durch folgende Formel bestimmen lassen:

$$a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_{n-s}}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}.$$

Diese Entwicklung ist nur auf eine einzige Weise möglich; die Cylinderfunktionenreihe hat denselben Konvergenzbereich wie die Fakultätenreihe $f(\nu)$ selbst, und die Konvergenz der beiden Reihen ist immer von derselben Natur: unbedingt oder bedingt, aber immer gleichmäßig. Wenn außerdem die Glieder einer dieser beiden Reihen immer endlich bleiben, wie groß ihr Index auch sein mag, so sind diese Reihen zu gleicher Zeit divergent oder oscillierend zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen.

Es kann demnach vorkommen, daß die beiden obenerwähnten Reihen auf einem Parallelstreifen der ν-Ebene von endlicher Breite, welche jedoch nicht größer als 1 sein darf, dessen Ränder auf der reellen Achse senkrecht stehen, nur bedingt, aber gleichmäßig konvergieren und doch eine analytische Funktion von ν darstellen[1]).

§ 104. **Anwendungen. Die Besselsche Additionsformel.**

Um einige Anwendungen des allgemeinen Satzes I zu geben setzen wir:

$$b_s = 1 \quad \text{und} \quad b_n = 0, \quad n \neq s,$$

und finden so die einfache Formel:

$$(1) \qquad \frac{x^{\nu+s}}{2^{\nu+s}\Gamma(\nu+s+1)} = \sum_{n=s}^{n=\infty} \frac{x^{n-s}}{2^{n-s}(n-s)!} \cdot J^{\nu+n}(x);$$

für $s = 0$ gibt diese Formel § 33, (6) wieder.

Weiter setzen wir:

$$f(\nu) = J^{\nu}(z), \quad b_n = \frac{(-1)^n z^{\nu+2n}}{2^{\nu+2n} \cdot n!}$$

und erhalten so unmittelbar die Entwicklung:

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung in Annales de l'École Normale (3) Bd. 19, p. 429; 1902.

$$(2)\qquad J^{\nu}(z) = \left(\frac{z}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{z^2}{2x}\right)^n}{n!} \cdot J^{\nu+n}(x),$$

welche viele speziellere Formeln liefert, die man sonst auf andere Weise und nach recht weitläufigen Methoden herzuleiten pflegt.

Setzt man zum Beispiel $z = x + y$, so findet man folgende Formel für die Addition der Argumente:

$$(3)\qquad J^{\nu}(x+y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n y^n}{n!} \left(1 + \frac{y}{2x}\right)^n J^{\nu+n}(x),$$

welche für alle endlichen Werte von x und y anwendbar ist. Für ν gleich einer positiven ganzen Zahl hat Bessel[1]) die Formel (3) gefunden; er hat sie dann bei seiner Berechnung der Tafeln für die J-Funktion angewendet.

Die Annahme $z = x\sqrt{2}$ in (2) gibt weiter die im Vergleich zu (1) für $s = 0$ sehr merkwürdige Formel:

$$(4)\qquad J^{\nu}(x\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{2^s \cdot s!} J^{\nu+s}(x),$$

welche von Lommel[2]) gefunden worden ist; dasselbe gilt auch für diejenigen Formeln, welche man durch Addition, bez. Subtraktion von (4) und dem eben genannten Spezialfalle von (1) erhält.

§ 105. Reihenentwicklungen von der Form $\Sigma a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n J^{\nu+n}(x)$.

Die Formel § 104, (1) liefert für $s = 0$ eine neue Entwicklung der willkürlichen Potenz x^{ν} nach Cylinderfunktionen; um die allgemeinen Reihen von dieser Form näher zu untersuchen, setzen wir in § 102, (1) $a_n x^n : 2^n$ für a_n oder, mit andern Worten, wir setzen hier:

$$(1)\qquad u_n = a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\nu} J^{\nu+n}(x), \quad v_n = \frac{a_n x^{2n}}{2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Weiter nehmen wir an, daß eine der Reihen mit positiven Gliedern $\Sigma|u_n|$ oder $\Sigma|v_n|$ konvergent ist; dann ist es erlaubt, die Glieder der aus Δ in § 102 gebildeten Doppelreihe in solcher Weise zu ordnen, daß wir diejenigen, welche dieselbe Potenz von x enthalten, zusammenfassen, und wir finden somit die Identität:

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie 1824, p. 35.

2) Studien über die Besselschen Funktionen p. 21; 1868.

$$(2) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n J^{\nu+n}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

wo wir:

$$(3) \qquad \Gamma(\nu + n + 1)\, b_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s a_{n-s}}{s!}$$

gesetzt haben, so daß ν offenbar nicht gleich einer negativen ganzen Zahl angenommen werden darf.

Setzt man umgekehrt voraus, daß in (3) die Koeffizienten b_n gegeben sind, so ist es auch möglich, und zwar auf Grund desselben Beweises wie in § 103, die Koeffizienten a_n eindeutig zu bestimmen; man findet in der Tat:

$$(4) \qquad a_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\nu + s + 1)}{(n-s)!}\, b_s.$$

Wir bilden nun mittelst (4) die Reihe Σu_n und haben dann zu beweisen, daß diese Reihe und die Potenzreihe rechter Hand in (2) gleichzeitig konvergieren oder divergieren müssen. Zu dem Ende setzen wir:

$$t_n = b_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

und gewinnen so aus (3), bez. (4):

$$t_n = v_n + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s x^{2s}}{s!\, 2^{2s}} \cdot \frac{v_{n-s}}{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+n-s+1)},$$

$$v_n = t_n + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{x^{2n-2s}}{(n-s)!\, 2^{2n-2s}} \cdot \frac{t_s}{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+s)};$$

somit ist es offenbar, daß dasselbe Verfahren wie in § 103 zu folgendem Satze führen muß:

II. *Wenn der Parameter ν nicht gleich einer negativen ganzen Zahl angenommen wird, kann die Potenzreihe mit lauter geraden Potenzen:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

eindeutig in eine Cylinderfunktionenreihe verwandelt werden, nämlich:

$$f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \left(\frac{x}{2}\right)^s J^{\nu+s}(x),$$

wo sich die Koeffizienten a_n durch die Formel bestimmen lassen:

$$a_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\nu + s + 1)}{(n - s)!} b_s.$$

Die neue Reihe hat denselben Konvergenzbereich wie $f(x)$ selbst, und die Konvergenz der beiden Reihen ist überall von derselben Natur: unbedingt oder bedingt, gleichmäßig oder nicht. Wenn außerdem die Glieder einer der beiden Reihen, wie groß auch ihr Index angenommen wird, endlich bleiben, so sind die beiden Reihen gleichzeitig divergent oder oscillierend zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen.

Will man eine Reihe mit lauter ungeraden Potenzen entwickeln, so kann man in den vorhergehenden Formeln $\nu + 1$ für ν setzen oder auch die oben gegebene Entwicklung mit $x : 2$ multiplizieren. Setzt man ferner in der Entwicklung von x^ν nacheinander $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\nu - 3$, $\cdots$ für ν, so findet man, falls ν nicht eine ganze Zahl ist, eine ähnliche Entwicklung einer Reihe mit negativen ganzen Potenzen von x.

Wir gehen indessen nicht näher auf dies Problem ein[1]).

§ 106. Entwicklung von $J^\varrho(x)$. Reduktionsformel für $R^{\nu,n}(x)$.

Um eine Anwendung des allgemeinen Satzes II zu geben, setzen wir:

$$f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\varrho J^\varrho(x), \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\varrho + n + 1)};$$

eine einfache Rechnung ergibt dann für a_n den Ausdruck:

$$a_n = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{n!\,\Gamma(\varrho + 1)} \cdot F(\nu + 1,\ -n,\ \varrho + 1,\ 1),$$

so daß die Gaußsche Formel (F_2) die einfache Entwicklung:

$$(1) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu - \varrho} J^\varrho(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\varrho - \nu)} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\varrho - \nu + n)}{n!\,\Gamma(\varrho + n + 1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot J^{\nu + n}(x)$$

liefert, welche also in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

Aus dieser allgemeineren Formel kann man durch Spezialisierungen der beiden Parameter ν und ϱ eine ganze Reihe anderer herleiten. Setzt man zum Beispiel $\varrho = \nu + p$, wo p eine ganze Zahl bedeutet, oder $\varrho = \pm \frac{1}{2}$, so findet man solche Spezialfälle, welche

1) Man vergleiche meine Abhandlung in Nyt Tidsskrift for Mathematik Bd. 9B, p. 83; 1898.

sich sehr leicht behandeln lassen. Wir setzen ferner $\varrho = \nu - p$ und finden nach einer einfachen Reduktion folgende endliche Reihe:

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^p J^{\nu - p}(x) = \Gamma(\nu + 1) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s \binom{p}{s}}{\Gamma(\nu + s - p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^s J^{\nu + s}(x).$$

Wenden wir nun den allgemeinen Satz des § 13 an, so ist es erlaubt, in (2) für $J^{\nu}(x)$ die andere Cylinderfunktion $\cos \nu\pi J^{-\nu}(x)$ zu setzen; schaffen wir dann den gemeinsamen Faktor $\cos \nu\pi$ weg und setzen wir in der so erhaltenen Formel $-\nu + p$ für ν, finden wir:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{\nu}(x) = \Gamma(-\nu + p + 1) \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \frac{\binom{p}{s}}{\Gamma(-\nu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^s J^{\nu - p - s}(x);$$

ändern wir nun hier mittelst der Eulerschen Formel (Γ_3) jede der vorkommenden Gammafunktionen und schreiben wir die Glieder rechter Hand in umgekehrter Ordnung, so finden wir schließlich:

$$(3) \qquad \begin{cases} (-1)^p \Gamma(\nu - p) J^{\nu}(x) = \\ \qquad = \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} \Gamma(\nu - p + s) \left(\frac{2}{x}\right)^s J^{\nu - 2p + s}(x), \end{cases}$$

eine Formel, die uns später in § 111 sehr nützlich sein wird. Der Spezialfall $\nu = 2p$ führt uns unmittelbar zu der mittelst der zwei Besselschen Integrale für die Cylinderfunktion erster Art gefundenen Formel § 18, (9), während die allgemeine Formel (1) mit § 40, (6) identisch ist.

Die Formel (3) läßt sich nach einer einfachen Rechnung auch folgendermaßen schreiben:

$$(4) \qquad \frac{J^{\nu}(x)}{p!} = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^{p-s}}{(p-s)!} \binom{\nu - p + s - 1}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s J^{\nu - 2p + s}(x);$$

setzt man hier $\nu + m$ für ν, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, so ergibt eine Anwendung der allgemeinen Formel § 13, (2) die merkwürdige Rekursionsformel für das Lommelsche Polynom:

$$(5) \qquad \frac{R^{\nu,m}(x)}{p!} = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^{p-s}}{(p-s)!} \binom{\nu + m - p + s}{s} \left(\frac{2}{x}\right)^s R^{\nu, m - 2p + s}(x),$$

indem man zuerst $\nu + 1$ für ν setzen muß. Die Spezialfälle $m = 2p$, $m = 2p + 1$ liefern sehr elegante Formeln.

Diese Rekursionsformel (5) zeigt am deutlichsten die außerordentlich große Biegsamkeit des Lommelschen Polynomes, welche noch größer zu sein scheint als diejenige der Bernoullischen Zahlen.

Kapitel XX.

Die Neumannschen Reihen erster Art.

§ 107. Allgemeine Formeln.

Wir gehen wieder von der Doppelreihe Δ in § 102 aus und ordnen ihre Glieder nach steigenden Potenzen von x, so daß wir eine Gleichung von folgender Form finden:

$$(1) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{p=0}^{p=n} a_p J^{\nu+p}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

wo wir:

$$(2) \qquad \Gamma(\nu+n+1)\, b_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{\nu+n}{s} a_{n-2s}$$

gesetzt haben. Nehmen wir zum Beispiel:

$$a_{2p} = (-1)^p (\nu+2p), \quad a_{2p+1} = 0$$

an, so erhalten wir aus (1) und (2) die Entwicklung:

$$(3) \qquad \frac{x}{2} \cdot J^{\nu-1}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (\nu+2n) J^{\nu+2n}(x),$$

welche von Lommel[1]) angegeben worden ist. Setzen wir ferner:

$$a_{2p} = (-1)^p \binom{-\frac{1}{2}}{p}, \quad a_{2p+1} = 0,$$

so gewinnen wir nach einer Anwendung der Formel A, (β) im Anhange die weitere Entwicklung:

$$(4) \qquad J^{\nu}(x) J^{\nu-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} J^{2\nu+2n}(2x),$$

welche ebenso wie (3) in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

Kehren wir nun zur Gleichung (2) zurück, so ist offenbar, daß uns diese Formel ermöglicht, die Koeffizienten a_n eindeutig durch die Koeffizienten b_n zu bestimmen, falls ν nicht einer negativen ganzen Zahl gleich ist. Die formale Auflösung dieses Gleichungssystems läßt sich am einfachsten durch vollständige Induktion und mittelst der Prinzipien der Differenzenrechnung durchführen.

---

1) Studien über die Besselschen Funktionen, p. 40; 1868.

Wir beweisen zuerst die Hilfsformel:

$$(5)\quad \sum_{p=0}^{p=m}(-1)^p\binom{m}{p}\frac{\nu+2r-2p}{\Gamma(\nu+2r-p+1)}\cdot\Gamma(\nu+2r-m-p)=0,\qquad m>1;$$

das allgemeine Glied unter dem Summenzeichen linker Hand läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{(-1)^p\binom{m}{p}(\nu+2r-2p)}{(\nu+2r-p)(\nu+2r-p-1)\cdots(\nu+2r-p-m)}=$$

$$=\frac{(-1)^p\binom{m}{p}}{(\nu+2r-p-1)\cdots(\nu+2r-p-m)}-\frac{(-1)^p m\binom{m-1}{p-1}}{(\nu+2r-p)\cdots(\nu+2r-p-m)}.$$

Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich mit Δ^s die Differenz der s^{ten} Ordnung, so läßt sich die Summe linker Hand in (5) mittelst der eben gegebenen Umformung folgendermaßen schreiben:

$$(-1)^m\Delta^m\left(\frac{1}{(\nu+2r-m-1)\cdots(\nu+2r-1)}\right)-$$

$$-(-1)^m m\,\Delta^{m-1}\left(\frac{1}{(\nu+2r-m-1)\cdots(\nu+2r)}\right),$$

und die Formel (5) ist eine unmittelbare Folge der Ausdrücke für diese beiden Differenzen.

Die vollständige Induktion gibt nun sehr leicht mittelst (5) für die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (2) den Ausdruck:

$$(6)\qquad a_n=(\nu+n)\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\nu+n-s)}{s!}\,b_{n-2s}.$$

Nach dieser formalen Bestimmung der Koeffizienten linker Hand in (1), die möglich ist, falls die Potenzreihe rechter Hand gegeben ist, müssen wir noch in aller Strenge die wirkliche Existenz der so erhaltenen Cylinderfunktionenreihe nachweisen und ihren Konvergenzbereich bestimmen. Setzen wir nun:

$$t_n=b_n\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad u_n=a_n\left(\frac{2}{x}\right)^\nu J^{\nu+n}(x),\quad v_n=\frac{a_n x^n}{2^n\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

so erhalten wir aus (2) und (6) die Identitäten:

$$t_n=v_n+\sum_{r=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^r}{r!}\cdot\frac{u_{n-2r}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{(\nu+n-r+1)(\nu+n-r+2)\cdots(\nu+n)},$$

$$v_n=t_n+\sum_{r=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{1}{r!}\cdot\frac{t_{n-2r}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{(\nu+n-r)(\nu+n-r+1)\cdots(\nu+n-1)},$$

so daß dieselbe Methode wie in § 103 den allgemeinen Satz liefert:

III. *Wenn der Parameter ν nicht gleich einer ganzen negativen Zahl angenommen wird, kann eine willkürliche Potenzreihe eindeutig nach Cylinderfunktionen entwickelt werden, nämlich:*

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^s = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x),$$

wo sich die Koeffizienten aus folgender Formel bestimmen lassen:

$$a_n = (\nu + n) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu + n - s)}{s!} b_{n-2s}.$$

Die so erhaltene Cylinderfunktionenreihe ist im Innern des Konvergenzkreises der Potenzreihe unbedingt konvergent; auf der Kreisperipherie selbst sind die beiden Reihen gleichzeitig unbedingt oder bedingt, gleichmäßig oder ungleichmäßig konvergent, oder sie sind, wenn die Glieder einer der Reihen sämtlich endlich bleiben, wie groß ihr Index auch angenommen wird, gleichzeitig divergent oder oscillierend zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen.

Wenn der Parameter ν nicht eine *ganze* Zahl bedeutet, ist es auch möglich, eine Reihe mit ganzen negativen Potenzen zu entwickeln; wir gehen indessen nicht näher darauf ein.[1])

Für ganze, nicht negative Werte von ν hat Neumann[2]) zuerst den Satz II bewiesen, während den allgemeinen Fall zuerst Sonin[3]) betrachtet hat; beinahe zu gleicher Zeit hat auch Gegenbauer[4]), offenbar ohne die russisch erschienene Arbeit Sonins zu kennen, den allgemeinen Satz bewiesen. Später sind die Neumannschen Reihen erster Art von König[5]), Heine[6]), Gram[7]), Pincherle[8]) und Kapteyn[9]) untersucht worden.

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung in Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 9 B, p. 83; 1898.

2) Theorie der Besselschen Funktionen 1867.

3) Journal de la Société mathématique de Moscou 1871. Math. Ann. Bd. 16, p. 77; 1880.

4) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 74, II. p. 126; 1876.

5) Mathematische Annalen, Bd. 5; 1872.

6) Handbuch der Kugelfunktionen Bd. I; 1878.

7) Doktordissertation, p. 44; Kopenhagen 1879.

8) Memorie dell' Istituto Lombardo (4) Bd. 3; 1881.

9) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10; 1893.

§ 108. Anwendungen. Entwicklung von $\frac{1}{y-x}$.

Zum Behufe einer ersten Anwendung der allgemeinen Formeln setzen wir $b_0 = 1$ und, für $n > 0$, $b_n = 0$ und finden dadurch die Formel § 33, (4) wieder, nämlich:

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s)\Gamma(\nu + s)}{s!} J^{\nu+2s}(x);$$

für $\nu = 0$ finden wir die in § 22 gegebene Formel (5) von Jacobi[1]), während die Formel (1) für ein ganzes positives ν von Schlömilch[2]) gefunden worden ist. Schlömilch[3]) hat noch andere ähnliche Formeln angegeben, die wir aus (1) folgendermaßen herleiten:

Aus folgenden zwei rein formalen Identitäten:

$$(2) \qquad \frac{2^{2n-1}\Gamma(2n+s)}{\Gamma(s+1)} = (2n+2s)\prod_{p=1}^{p=n-1}\left((2n+2s)^2 - (2p)^2\right),$$

$$(3) \qquad \frac{2^{2n}\Gamma(2n+s+1)}{\Gamma(s+1)} = \prod_{p=0}^{p=n-1}\left((2n+2s+1)^2 - (2p+1)^2\right)$$

finden wir mittelst (1) durch vollständige Induktion, daß die Summe der unendlichen Reihe:

$$(4) \qquad s_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} (2s+\varepsilon)^n J^{2s+\varepsilon}(x),$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, während $\varepsilon = 1, 2$ anzunehmen ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist, einem ganzen Polynome n^{ten} Grades in x gleich sein muß.

Benutzen wir nämlich die Identitäten (2), (3), so ersehen wir, daß sich die aus (1) für $\nu = n$ erhaltene Reihe als eine homogene lineare Funktion derjenigen Reihen darstellen läßt, welche man aus $s_n, s_{n-2}, s_{n-4}, \ldots$ durch Weglassung der ersten Glieder erhält. Nun zeigen aber die Formeln (2), (3), daß die Hinzufügung dieser Glieder auf die obenerwähnte homogene lineare Funktion keinen Einfluß haben kann, weil die beiden Seiten von (2), (3) für ganze negative Werte von s verschwinden müssen.

---

1) Journal fur Mathematik Bd. 15, p. 12; 1836.

2) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 2, p. 141; 1857.

3) loc. cit. p. 141.

Nachdem man so die Form der durch s_n definierten Funktion gefunden, bestimmt man die noch unbekannten Koeffizienten des obenerwähnten Polynoms sehr leicht, indem man die Reihe rechter Hand in (4) mittelst der allgemeinen Formeln § 107, (1), (2) als eine Potenzreihe in x schreibt; auf diese Weise findet man die gesuchte Formel:

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (2s+\varepsilon)^n J^{2s+\varepsilon}(x) = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \mathfrak{A}_n^{n-2p} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n-2p},$$

wo der Kürze halber:

$$(6)\qquad \mathfrak{A}_n^{n-2p} = \frac{1}{(n-2p)!} \cdot \sum_{s=0}^{<\frac{n}{2}-p} (-1)^s \binom{n-2p}{s} (n-2p-2s)^n$$

gesetzt worden ist.

Zum Zwecke einer zweiten Anwendung setzen wir:

$$b_n = \frac{1}{y^{n+1}}$$

und finden so eine Entwicklung von folgender Form:

$$(7)\qquad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s O^{\nu,s}(y) J^{\nu+s}(x), \quad |x| < |y|,$$

wo wir der Kürze halber:

$$(8)\qquad O^{\nu,n}(y) = \frac{\nu+n}{4} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-s)}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s+1}, \quad O^{\nu,0}(y) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{y}$$

gesetzt haben, während im allgemeinen ε_s gleich 2 zu nehmen ist, außer für $s=0$, wo $\varepsilon_0 = 1$ sein muß. Für $\nu = 0$ finden wir demnach, daß:

$$(9)\qquad O^{0,n}(y) = O^n(y)$$

sein muß, wo $O^n(y)$ das in § 30 Formel (24) eingeführte Neumannsche Polynom bedeutet.

Die Formel (7) hat in der Geschichte der Neumannschen Reihen erster Art eine wichtige Rolle gespielt; in der Tat haben Neumann, Sonin und Gegenbauer durch sie unter Anwendung des Cauchyschen Fundamentalintegrales ebendiese Reihen entwickelt.

Wir setzen ferner:

$$b_s = \frac{1}{y^s} \quad \text{für} \quad s > 0 \quad \text{und} \quad b_0 = 0,$$

so daß die allgemeinen Formeln folgende Entwicklung liefern:

$$(10)\qquad \frac{x}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \sum_{s=1}^{s=\infty} (\nu + s)\, S^{\nu,s}(y)\, J^{\nu+s}(x),$$

wo:

$$(11)\qquad S^{\nu,n}(y) = \sum_{s=0}^{s \leqq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu + n - s)}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s}$$

gesetzt worden ist, so daß wir auch hier für $\nu = 0$ die Identität:

$$(12)\qquad S^{0,n}(y) = S^{n}(y)$$

gewinnen, in der $S^{n}(y)$ das in § 3 Formel (10) eingeführte Schläflische Polynom bedeutet.

Für die Entwicklungen von der Form (7), (10) hat Pincherle[1]) einen interessanten allgemeinen Satz bewiesen.

§ 109. Entwicklung von $J^{\varrho}(\alpha x)$. Die Reihe $e^{\mp ix}\Sigma a_n J^{\nu+n}(x)$.

Als weitere Anwendung der allgemeinen Neumannschen Reihen suchen wir die Entwicklung von $J^{\varrho}(\alpha x)$, wo α und ϱ endliche Größen bedeuten; die allgemeinen Formeln geben hier:

$$(1)\qquad \left(\frac{2}{\alpha x}\right)^{\varrho} J^{\varrho}(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + 2s)\, a_{2s} J^{\nu+2s}(x),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(2)\qquad a_{2n} = \frac{\Gamma(\nu + n)}{n!\, \Gamma(\varrho + 1)} \cdot F(\nu + n,\ -n,\ \varrho + 1,\ \alpha^2)$$

gesetzt haben.

Aus der allgemeineren Formel (1) kann man eine große Menge anderer herleiten; so findet man z. B. mittelst der Gaußschen Formel (F_2) die speziellere Entwicklung:

$$(3)\qquad J^{\varrho}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho-\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu + 2s)\, \Gamma(\nu + s)}{\Gamma(\varrho + s + 1)} \binom{\varrho - \nu}{s} J^{\nu+2s}(x);$$

wenn $\varrho = \nu + r$ angenommen wird, wo r eine positive ganze Zahl bedeutet, wird die Reihe rechter Hand endlich, und man erhält:

$$(4)\qquad J^{\nu+r}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{r} \cdot \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(\nu + 2s)\, \Gamma(\nu + s)}{\Gamma(\nu + r + s + 1)} \binom{r}{s} J^{\nu+2s}(x);$$

---

1) Rendiconti dell' Istituto Reale Lombardo (2) Bd. 15 p. 225; 1882.

setzt man darin $\nu = 0$, so gelangt man zu der durch die zwei Besselschen Integrale für die Cylinderfunktion der ersten Art bewiesenen Formel § 18, (7); man muß jedoch darauf hinweisen, daß für $s = 0$ der Zähler rechter Hand in (4) $\Gamma(\nu + 1)$, für $\nu = 0$ also gleich 1 wird.

Differentiiert man ferner die Formel (3) nach ϱ und setzt man darnach $\varrho = \nu$, so findet man für die in § 15, (5) eingeführte Funktion $\mathfrak{J}^\nu(x)$ folgende Entwicklung:

$$(5)\quad \mathfrak{J}^\nu(x) = -\Psi(\nu+1)J^\nu(x) - \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\nu+s}\right)J^{\nu+2s}(x),$$

so daß man für die in § 3, Formel (15) eingeführte Funktion $U^n(x)$ die weitere Entwicklung:

$$(6)\quad U^n(x) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)J^\nu(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{n+s}\right)J^{n+s}(x)$$

gewinnt; eine Anwendung der Formeln § 3, (13) und § 22, (23) liefert nun ohne Schwierigkeit für die Neumannsche Cylinderfunktion den Ausdruck, durch welchen Neumann[1]) diese Funktion definiert hat.

Setzt man weiter in (3) $\varrho = \pm\frac{1}{2}$, so erhält man mittelst (Γ_4) die Entwicklung:

$$(7)\qquad (2x)^\nu e^{\pm ix} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(\pm i)^s\frac{(\nu+s)\,\Gamma(2\nu+s)}{s!}J^{\nu+s}(x),$$

welche nichts anders ist als die Formel § 37, (5).

Setzt man endlich in (7) $\nu+1, \nu+2, \nu+3, \cdots$ für ν, so gewinnt man durch Addition den allgemeinen Satz:

IV. *Wenn ν nicht einer ganzen negativen Zahl gleich ist, kann eine Potenzreihe mit ganzen, nicht negativen Exponenten eindeutig in eine Reihe von folgender Form entwickelt werden:*

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} b_n(2x)^n = \frac{2\sqrt{\pi}\,e^{\mp ix}}{(2x)^\nu}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x),$$

wo der Kürze halber:

$$(9)\qquad a_n = (\nu+n)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\pm i)^{n-s}\,\Gamma(2\nu+n+s)}{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})\,(n-s)!}b_s$$

gesetzt ist, und diese neue Reihe hat genau dieselben Eigenschaften wie die allgemeine Neumannsche Reihe der ersten Art.

---

1) Theorie der Besselschen Funktionen p. 52; 1867.

Als Beispiel dieser Entwicklungen betrachten wir den Fall, in welchem:

$$b_n = \frac{e^{-iy}}{2^n \cdot y^{n+1}}$$

ist; wir gelangen dann zu folgender Entwicklung:

$$(10)\qquad \frac{e^{-i(y-x)}}{y-x} = (2x)^{-\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \mathfrak{O}^{\nu,n}(x) J^{\nu+n}(x), \quad |x| < |y|,$$

wo wir:

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{O}^{\nu,n}(y) = (\nu+n) i^{n+1} \sqrt{\pi} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=n} \dfrac{\Gamma(2\nu+n+s)}{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})(n-s)!} \cdot \dfrac{e^{-iy}}{(2yi)^{s+1}}, \\ \mathfrak{O}^{\nu,0}(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

gesetzt haben. Ganz auf dieselbe Weise finden wir die ähnliche Formel:

$$(12)\qquad \frac{x e^{-i(y-x)}}{y-x} = (2x)^{-\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu+s)\, \mathfrak{S}^{\nu,s}(y)\, J^{\nu+s}(x),$$

wo:

$$(13)\qquad \mathfrak{S}^{\nu,n}(y) = \frac{2\sqrt{\pi}\, i^n}{e^{iy}} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\Gamma(2\nu+n+s)}{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})(n-s)!} \left(\frac{1}{2yi}\right)^s$$

gesetzt ist. In dem Spezialfalle $\nu = 0$ erhalten wir auch hier:

$$(14)\qquad \mathfrak{O}^{0,n}(y) = \mathfrak{O}^n(y), \qquad \mathfrak{S}^{0,n}(y) = \mathfrak{S}^n(y),$$

wo $\mathfrak{O}^n(y)$ und $\mathfrak{S}^n(y)$ die in § 36, (16) und § 6, (11) definierten Funktionen bedeuten; somit haben wir eine neue Analogie zwischen diesen Funktionen und den altbekannten analogen Funktionen $O^n(y)$ und $S^n(y)$ nachgewiesen.

§ 110. **Entwicklungen von** $\cos(\alpha x)$, $\sin(\alpha x)$ **und** $J^{\nu-\frac{1}{2}}(x \sin\theta)$.

Wir kehren nun zu der Formel § 109, (1) zurück und setzen darin $\varrho = \pm\frac{1}{2}$; eine Anwendung von (K_4) und (K_5) ergibt dann unschwer die zwei anderen Entwicklungen:

$$(1)\qquad \cos(\alpha x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu+2s)\, K^{\nu,2s}(\alpha)\, J^{\nu+2s}(x),$$

$$(2)\qquad \sin(\alpha x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu+2s+1)\, K^{\nu,2s+1}(\alpha) J^{\nu+2s+1}(x),$$

wo $K^{\nu,n}(\alpha)$ die im Anhange erwähnte Kugelfunktion bedeutet. Setzt man $\nu = \frac{1}{2}$, so werden diese Kugelfunktionen mit den Legendreschen identisch; die so erhaltenen Formeln sind zuerst von Bauer[1]) gefunden worden, während Gegenbauer[2]) die allgemeinen Formeln (1), (2) aufgestellt hat. Für $\nu = 0$ werden unsere Formeln mittelst (K_{10}) und (K_{11}) mit den in § 22 hergeleiteten Jacobischen Formeln (1), (2) identisch.

Wir kehren noch einmal zu der allgemeinen Formel § 109, (1) zurück; die Form der hypergeometrischen Reihe § 109, (2) führt uns mittelst (K_6) dazu, $\varrho = \nu - \frac{1}{2}$, $\alpha = \sin\theta$ zu setzen, und wir finden so die allgemeine Formel:

$$(3)\quad \frac{J^{\nu-\frac{1}{2}}(x\sin\theta)}{(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(s+\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})} K^{\nu,2s}(\cos\theta) J^{\nu+2s}(x),$$

welche unbekannt zu sein scheint. Für $\nu = p + \frac{1}{2}$, wo p eine ganze Zahl bedeutet, hat Bauer[3]) die Formel (3) gefunden; Hobson[4]) hat später den Fall $\nu = \frac{1}{2}$ betrachtet, offenbar ohne die Abhandlung von Bauer zu kennen. Für $\nu = 0$ findet man die Formel § 22, (1) von Jacobi; Hobson[5]) betrachtet noch den Fall $\nu = 1$, ohne zu bemerken, daß sich die so gefundene Formel unmittelbar in die zweite Jacobische § 22, (2) überführen läßt, und merkwürdigerweise haben auch Gray und Matthews[6]) dies nicht bemerkt.

Offenbar müssen uns die Formeln (1), (2), (3) eine Menge von Entwicklungen gewisser Funktionen nach Cylinder- oder Kugelfunktionen, sowie von bestimmten Integralen liefern, die Cylinder- oder Kugelfunktionen enthalten. Wir gehen indessen nicht näher auf diese Probleme ein.

§ 111. Formeln von Neumann, Clebsch und Gegenbauer.

Bedeutet θ einen reellen Winkel, so ist offenbar, daß die Funktion:

$$(R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot C^\nu\left(\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\right),$$

wo $C^\nu(x)$ eine willkürliche Cylinderfunktion mit dem Argumente x und dem Parameter ν bedeutet, nach steigenden Potenzen von r ent-

---

1) Journal für Mathematik Bd. 56, p. 104, 106; 1859.
2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 72, II, p. 127; 1876.
3) Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1875, p. 265.
4) 5) Proceedings of the London Math. Soc. Bd. 25, p. 69, p. 68; 1894.
6) Bessel Functions, p. 240; 1895.

wickelt werden kann, falls noch $R > r$ angenommen wird; in dem speziellen Falle, daß die Cylinderfunktion von der ersten Art ist, kann man diese Bedingung fallen lassen.

Wir setzen nun der Kürze halber:

$$(1) \qquad \omega(r) = R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2, \quad \omega(0) = R^2,$$

schreiben aber häufig nur ω für $\omega(r)$, wenn diese Abkürzung kein Mißverständnis veranlassen kann; wir gewinnen so eine Entwicklung von der Form:

$$\omega^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{\omega}) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \cdots,$$

wo:

$$b_0 = R^{-\nu} C^\nu(R), \quad n!\, b_n = D_r^n \left(\omega^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{\omega})\right)_{r=0}$$

sein muß.

Wendet man nun, um die Koeffizienten b_n näher zu bestimmen, die Formel:

$$D_\omega^n \left(\omega^{-\frac{\nu}{2}} C^\nu(\sqrt{\omega})\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega^{-\frac{\nu+n}{2}} C^{\nu+n}(\sqrt{\omega})$$

an, so ergibt eine allgemeine Formel für die Bildung höherer Differentialquotienten von zusammengesetzten Funktionen[1]) folgenden Ausdruck:

$$n!\, b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{U_s^n}{s!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^s \cdot \frac{C^{\nu+s}(R)}{R^{\nu+s}},$$

wo man der Kürze halber:

$$U_s^n = D_\varrho^n \Big[\big(\omega(\varrho) - \omega(0)\big)^s\Big]_{\varrho=0} = D_\varrho^n \Big[\varrho^s (\varrho - 2R\cos\theta)^s\Big]_{\varrho=0}$$

gesetzt hat; man findet so endlich für den allgemeinen Koeffizienten den Ausdruck:

$$(2) \qquad b_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \frac{(R\cos\theta)^{n-2s}}{2^s \cdot s!\,(n-2s)!} \cdot \frac{C^{\nu+n-s}(R)}{R^{\nu+n-s}}.$$

Wir suchen nunmehr die so erhaltene Potenzreihe in eine Neumannsche Reihe der ersten Art zu entwickeln; eine Anwendung der allgemeinen Formeln zeigt dann, daß in dieser Neumannschen Reihe der Koeffizient a_n ein Polynom vom n^{ten} Grade in $\cos\theta$ werden muß; eine einfache Ausführung der Rechnungen liefert für den zur Potenz $(\cos\theta)^{n-2p}$ gehörigen Koeffizienten den Ausdruck:

---

1) Man vergleiche z. B. Schlömilch, Kompendium Bd. II, p. 5.

$$\frac{(\nu+n)\,2^{n-2p}}{p!\,(n-2p)!\,R^\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=p}(-1)^s\binom{p}{s}\Gamma(\nu+n-p+s)\left(\frac{2}{R}\right)^s C^{\nu+n-2p+s}(R)$$

oder nach einer Anwendung von § 106, (4):

$$\frac{(-1)^p(\nu+n)\,2^{n-2p}\,\Gamma(\nu+n-p)}{p!\,(n-2p)!\,R^\nu}\cdot C^{\nu+n}(R);$$

nach dieser Reduktion findet man weiter ohne Mühe:

$$a_n=(\nu+n)\,\Gamma(\nu)\cdot K^{\nu,n}(\cos\theta)\,C^{\nu+n}(R)\,R^{-\nu},$$

und erhält somit schließlich die interessante Entwicklung:

$$(3)\quad \omega^{-\frac{\nu}{2}}C^\nu(\sqrt{\omega})=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu)}{R^\nu r^\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(\nu+s)\,C^{\nu+s}(R)\,J^{\nu+s}(r)\,K^{\nu,s}(\cos\theta);$$

in dem Spezialfalle $\nu=0$ findet man mittelst (K_6) folgende elegante Formel:

$$(4)\quad C^0\left(\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}\right)=C^0(R)J^0(r)+2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}C^s(R)J^s(r)\cos(s\varphi),$$

welche von Neumann[1]) gefunden worden ist; Neumann[2]) betrachtet auch den Fall $\nu=\frac{1}{2}$, ohne zu bemerken, daß schon früher Clebsch[3]) die entsprechende Formel aufgestellt hatte. Die allgemeine Formel (3) ist zuerst von Gegenbauer[4]) bewiesen worden; sein Beweis ist indessen etwas kompliziert, was auch mit demjenigen von Sonin[5]) der Fall ist. Beltrami[6]) hat einen schönen Beweis für die Neumannsche Formel (4) gegeben, allerdings unter der Voraussetzung, daß die Cylinderfunktion von der ersten Art ist. Später hat Graf[7]) mit Zuhilfenahme der Integralausdrücke für $J^\nu(\sqrt{\omega})$ und $Y^\nu(\sqrt{\omega})$ die allgemeine Formel (3) bewiesen.

Durch die Annahme $\varphi=\pi$ gewinnt man aus (3) die Additionsformel:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{C^\nu(R+r)}{(R+r)^\nu}=\frac{2\sqrt{\pi}}{(2Rr)^\nu\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\cdot\\ &\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\nu+s)\,\Gamma(2\nu+s)}{s!}\cdot C^{\nu+s}(R)J^{\nu+s}(r),\quad |r|<|R|,\end{aligned}\right.$$

1) Theorie der Besselschen Funktionen, p. 65; 1867.
2) Sitzungsberichte der Leipziger Akademie 1886, p. 75—82.
3) Journal für Mathematik Bd. 61, p. 227; 1863.
4) Wiener Sitzungsberichte Bd. 70 II, p. 13, 14; 1874.
5) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 22, 23; 1880.
6) Atti dell' Accademia di Torino, Bd. 16, p. 201—205; 1881.
7) Mathematische Annalen Bd. 43, p. 143, 144; 1893.

welche ebenfalls von Gegenbauer[1]) gefunden worden ist. Setzen wir weiter in (3) $C^\nu(x) = J^\nu(x)$ und $R = r = x$, was erlaubt ist, so finden wir die weitere, ebenfalls von Gegenbauer[2]) gegebene Formel:

$$(6)\qquad \frac{J^\nu(2x\sin\frac{1}{2}\theta)}{(2\sin\frac{1}{2}\theta)^\nu} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{x^\nu}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(\nu+s)\left(J^{\nu+s}(x)\right)^2 K^{\nu,s}(\cos\theta),$$

welche im Vergleich zu § 110, (3) in der Tat höchst merkwürdig ist. Durch die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$, $\theta = \pi$ erhält man aus (6) die von Lommel[3]) gefundene speziellere Formel:

$$(7)\qquad \sin(2x) = \pi\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(2s+1)\left(J^{s+\frac{1}{2}}(x)\right)^2,$$

welche sonach in der ganzen x-Ebene anwendbar ist. Die Annahme $\nu = -\frac{1}{2}$, $\theta = \pi$ führt dagegen wegen des Faktors $\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$ im Nenner rechter Hand in (5) nur zu einer formalen Identität.

§ 112. Entwicklung einer Funktion von der Form $f(y-x)$.

Man kann die Neumannschen Reihen der ersten Art einfachen Transformationen unterwerfen, welche für die Theorie dieser Reihen von großer Bedeutung sind; wendet man in der Tat auf die einzelnen Glieder rechter Hand in der Formel:

$$(1)\qquad f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}a_n J^{\nu+n}(x)$$

die zweite Fundamentalformel der Cylinderfunktionen an, nämlich:

$$\frac{2(\nu+n)}{x}\cdot J^{\nu+n}(x) = J^{\nu+n-1}(x) + J^{\nu+n+1}(x),$$

so findet man für $\nu \neq 0$:

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{2}{x}f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu\left(\frac{a_0}{\nu}J^{\nu-1}(x) + \frac{a_1}{\nu+1}J^\nu(x) + \right.\\ \qquad\qquad \left. + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{\nu+n-1} + \frac{a_{n+1}}{\nu+n+1}\right)J^{\nu+n}(x)\right) \end{cases}$$

und in dem Spezialfalle $\nu = 0$:

$$(3)\qquad \frac{2}{x}f(x) = \left(\frac{2a_0}{x} + a_1\right)J^0(x) + \frac{a_1}{2}J^1(x) + \sum_{s=2}^{s=\infty}\left(\frac{a_{s-1}}{s-1} + \frac{a_{s+1}}{s+1}\right)J^s(x);$$

---

1) 2) loc. cit. p. 14.

3) Mathematische Annalen Bd. 2, p. 633; 1876.

durch Zuhilfenahme der Formel (2) hat Lommel seinen Spezialfall unserer allgemeinen Formel § 33, (10) gefunden.

Durch Anwendung der ersten Fundamentalformel:

$$2 D_x J^{\nu+n}(x) = J^{\nu+n-1}(x) - J^{\nu+n+1}(x)$$

erhält man dagegen aus (1):

$$2f^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(J^{\nu+n-1}(x) - J^{\nu+n+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J^{\nu+n}(x)\right);$$

eliminiert man nun mittelst der zweiten Fundamentalformel die Funktion $J^{\nu+n}(x)$ aus dem allgemeinen Gliede rechter Hand in dieser Formel, so findet man:

$$(4) \quad 2f^{(1)}(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{n+1}{\nu+n+1} a_{n+1} - \frac{2\nu+n-1}{\nu+n-1} a_{n-1}\right) J^{\nu+n}(x),$$

eine Formel, welche auch für $\nu = 0$ anwendbar ist, wenn die zu den Funktionen $J^0(x)$ und $J^1(x)$ gehörigen Koeffizienten gleich a_1, bez. $a_2 - a_0$ angenommen werden.

Die Formeln (2) und (3) sind übrigens für eine willkürliche Reihe anwendbar, welche nach Cylinderfunktionen fortschreitet, während (4) natürlich erfordert, daß die Koeffizienten a_n sämtlich von x unabhängig sind.

Die allgemeinen Formeln, welche wir soeben entwickelt haben, finden eine unmittelbare Anwendung auf folgende Neumannsche Reihe[1]):

$$(5) \qquad f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s a_\nu^s(y) J^{\nu+s}(x),$$

wo $f(y-x)$ in eine Taylorsche Reihe entwickelbar sein muß. Differentiiert man nämlich die Formel (5) erstens nach x und zweitens nach y, so erhält man mittelst (4) die Identitäten:

$$(6) \quad \begin{cases} 2 D_y a_\nu^n(y) = \dfrac{2\nu+n-1}{\nu+n-1} a_\nu^{n-1}(y) - \dfrac{n+1}{\nu+n+1} a_\nu^{n+1}(y), \quad n > 0 \\ D_y a_\nu^0(y) = -\dfrac{1}{\nu+1} a_\nu^1(y). \end{cases}$$

Umgekehrt reichen offenbar die Formeln (6) auch aus, um zu beweisen, daß die Neumannsche Reihe rechter Hand in (5), falls sie überhaupt konvergiert, eine Funktion vom Argumente $y - x$ darstellen muß.

1) Hier und in den folgenden Formeln bedeutet ε_n den gewöhnlichen Koeffizienten, welcher im allgemeinen gleich 2 ist, außer für $n = 0$, wo man $\varepsilon_0 = 1$ zu nehmen hat.

In dem speziellen Falle $\nu = 0$ schreiben wir einfach $a^n(y)$ für $a_0^n(y)$ und gewinnen so aus (6) den Satz:

Wenn $\nu = 0$ angenommen wird, sind die Koeffizienten $a^n(y)$ der Neumannschen Reihe für $f(y - x)$ immer Lösungen der ersten Fundamentalformel der Cylinderfunktionen.

Wenn die Reihe (5) wirklich existiert, so erhält man auch die zwei anderen **Neumannschen** Reihen:

$$(7) \qquad \frac{x}{y-x} \cdot f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (\nu + s) B_{\nu}^{s}(y) J^{\nu+s}(x),$$

$$(8) \qquad \frac{1}{y-x} \cdot f(y-x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s A_{\nu}^{s}(y) J^{\nu+s}(x),$$

und eine Anwendung der Formel (5) ergibt dann unmittelbar zwischen den Koeffizienten folgende Beziehung:

$$(9) \qquad 2yA_{\nu}^{n}(y) = (\nu + n) B_{\nu}^{n}(y) + 2a_{\nu}^{n}(y),$$

wo man $B_{\nu}^{0}(y) = 0$ zu setzen hat. Transformiert man mittelst (2) auch die Reihe (5), so findet man weiter die Formeln:

$$(10) \qquad \begin{cases} B_{\nu}^{n-1}(y) + B_{\nu}^{n+1}(y) = 4A_{\nu}^{n}(y), & n > 0 \\ B_{\nu}^{1}(y) = 2A_{\nu}^{0}(y). \end{cases}$$

Man kann nun auch sehr leicht aus (9) und (10) sowohl $A_{\nu}^{n}(y)$ als $B_{\nu}^{n}(y)$ für sich eliminieren und findet beziehentlich:

$$(11) \qquad B_{\nu}^{n-1}(y) + B_{\nu}^{n+1}(y) = \frac{2(\nu + n)}{y} B_{\nu}^{n}(y) + \frac{4}{y} a_{\nu}^{n}(y),$$

$$(12) \qquad \begin{cases} 2A_{\nu}^{n}(y) = \dfrac{yA_{\nu}^{n+1}(y) - a_{\nu}^{n+1}(y)}{\nu + n + 1} + \dfrac{yA_{\nu}^{n-1}(y) - a_{\nu}^{n-1}(y)}{\nu + n - 1}, & n > 0 \\ yA_{\nu}^{0}(y) = a_{\nu}^{0}(y). \end{cases}$$

Bemerkt man noch, daß die Formel (6) auch für $A_{\nu}^{n}(y)$ gültig ist, so findet man nach einer Differentiation nach y und darauf folgender Anwendung von (10) diese Fundamentalgleichung:

$$(13) \qquad 2D_y B_{\nu}^{n}(y) = \frac{2\nu + n}{\nu + n} B_{\nu}^{n-1}(y) - \frac{n}{\nu + n} B_{\nu}^{n+1}(y).$$

Wir haben noch nachzuweisen, daß die Funktionen A und B beide einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen. Um die Gleichung für B zu finden, muß man aus (11) und (13) $B_{\nu}^{n-1}(y)$ und dann $B_{\nu}^{n+1}(y)$ eliminieren; differentiiert man dann ferner die so erhaltenen Gleichungen nach y, so erhält man für $z = B_{\nu}^{n}(y)$ die Differentialgleichung:

$$(14)\quad \begin{cases} z^{(2)} + \dfrac{1-2\nu}{y} z^{(1)} + \left(1 - \dfrac{n(2\nu+n)}{y^2}\right) z = \\ = \dfrac{2n(2\nu+n)}{(\nu+n)y^2} a_\nu^n(y) - \dfrac{2n}{(\nu+n)y} D_y a_\nu^n(y) + \dfrac{2(2\nu+n-1)}{(\nu+n-1)y} a_\nu^{n-1}(y), \end{cases}$$

so daß eine Anwendung von (9) für $z = A_\nu^n(y)$ die ähnliche Gleichung:

$$(15)\quad \begin{cases} z^{(2)} + \dfrac{3-2\nu}{y} z^{(1)} + \left(1 - \dfrac{(n-1)(n+1-\nu)}{y^2}\right) z = \\ = \dfrac{1}{y}\left(D_y^2 a_\nu^n(y) + \dfrac{1-2\nu-n}{y} D_y a_\nu^n(y) + a_\nu^n(y)\right) + \dfrac{(\nu+n)(2\nu+n-1)}{(\nu+n-1)y^2} a_\nu^{n-1}(y) \end{cases}$$

ergibt.

§ 113. Die Funktionen $O^n(y)$ und $S^n(y)$, $\mathfrak{O}^n(y)$ und $\mathfrak{S}^n(y)$.

Wir haben schon bemerkt, daß die beiden Funktionen $a^n(y)$ und $A^n(y)$ für $\nu = 0$ der ersten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen genügen müssen; aus § 112, (13) ergibt sich, daß dasselbe auch mit $B^n(y)$ der Fall sein muß, während man für dieselbe Funktion aus (11) die andere Fundamentalgleichung:

$$(1)\qquad B^{n-1}(y) + B^{n+1}(y) = \frac{2n}{y} B^n(y) + \frac{4}{y} a^n(y)$$

gewinnt; um diese Formel und die ähnlichen für $A^n(y)$ und $a^n(y)$ auch für negative ganze Werte von n aufrecht erhalten zu können, setzen wir:

$$(2)\qquad \begin{cases} B^{-n}(y) = (-1)^{n-1} B^n(y), \quad a^{-n}(y) = (-1)^n a^n(y), \\ \qquad A^{-n}(y) = (-1)^n A^n(y) \end{cases}$$

und brauchen diese Gleichungen als Definitionen der betreffenden Funktionen mit negativem ganzem Parameter.

Wir betrachten nun den einfachsten Fall, wo $f(x) = 1$ angenommen wird, und finden:

$$(3)\qquad a^{2n}(y) = 1, \quad a^{2n+1}(y) = 0,$$

$$(4)\qquad A^n(y) = O^n(y), \quad B^n(y) = S^n(y);$$

diese Eigenschaft als Entwicklungskoeffizient für das Schläflische Polynom $S^n(y)$ scheint bisher unbeachtet geblieben zu sein.

Für die Funktion $O^n(y)$ hat zuerst Neumann[1]) die aus § 112, (12) und (15) erhaltene spezielle Formel gegeben, während Schläfli[2])

1) Theorie der Besselschen Funktionen p. 13, 21; 1867.

2) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 137, 139; 1871.

die Formeln (6), (10), (11) gefunden hat; beinahe zu gleicher Zeit und offenbar, ohne die Abhandlung Schläflis zu kennen, hat Gegenbauer[1]) dieselben Formeln hergeleitet. Wir bemerken noch, daß Crelier[2]) neuerdings durch eine Anwendung von Integralausdrücken dieselben Formeln entwickelt hat.

Setzt man nunmehr $f(x) = e^{-ix}$, so findet man:

$$a^n(y) = i^n e^{-iy}, \tag{5}$$

$$A^n(y) = \mathfrak{O}^n(y), \quad B^n(y) = \mathfrak{S}^n(y), \tag{6}$$

so daß wir hier eine neue Analogie zwischen diesen zwei Funktionenpaaren gefunden haben.

Wir bemerken noch, daß wir für $z = O^n(y)$, bez. $z = \mathfrak{O}^n(y)$ folgende Differentialgleichungen erhalten:

$$z^{(2)} + \frac{3}{y} z^{(1)} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{y^2}\right) z = \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{y} + \frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{y^2}, \tag{7}$$

$$z^{(2)} + \frac{3}{y} z^{(1)} + \left(1 - \frac{n^2 - 1}{y^2}\right) z = \frac{i^{n-1}}{y^2} \cdot e^{-iy}. \tag{8}$$

Wir kehren nun zu den Formeln des § 112 zurück, um die eigentliche Ursache für die für $\nu = 0$ erhaltene große Einfachheit dieser Formeln aufzusuchen. Eine direkte Ausrechnung ergibt für diese Entwicklungskoeffizienten folgende Ausdrücke:

$$a^n(y) = (-1)^n n! \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-p-1)!}{p!} \cdot \frac{2^{n-2p-1}}{(n-2p)!} f^{(n-p)}(y), \tag{9}$$

$$A^n(y) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^{n-p} 2^{n-p}}{(n-p)!} \cdot O_p^n(y) f^{(n-p)}(y), \tag{10}$$

$$B^n(y) = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^{n-p} 2^{n-p}}{(n-p)!} \cdot S_p^n(y) f^{(n-p)}(y), \tag{11}$$

wo wir der Kürze halber:

$$S_p^n(y) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{p-2s}, \quad S_0^n(y) = 0, \tag{12}$$

$$O_p^n(y) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left(\frac{2}{y}\right)^{p-2s+1} \tag{13}$$

1) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 65 II, p. 35; 1872.

2) Comptes rendus Bd. 125, p. 421—423, p. 860—863; 1897.

gesetzt haben, so daß wir identisch finden:

(14) $$S_n^n(y) = S^n(y), \quad O_n^n(y) = O^n(y),$$

während die allgemeineren Funktionen (12), (13) die Summen der ersten Glieder von $S^n(y)$ und $O^n(y)$, mit einer passenden Potenz von y multipliziert, darstellen.

Führt man nun in den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen die aus (9), (10), (11) gewonnenen Ausdrücke ein und ordnet man die so erhaltene Gleichung nach den Differentialquotienten von $f(y)$, so werden die einzelnen Koeffizienten rationale und von $f(y)$ unabhängige Funktionen von y, so daß sie offenbar identisch verschwinden müssen; denn es gibt ja unendlich viele Funktionen $f(y)$, welche nicht Lösungen von linearen Differentialgleichungen endlicher Ordnung und mit rationalen Koeffizienten sein können; man braucht zum Beispiel nur $f(y) = e^{\pi y}$ zu setzen und zu beachten, daß π eine transcendente Zahl ist.

Auf diese Weise finden wir folgende Fundamentalformeln:

(15) $$O_p^n(y) = \frac{n}{2y} S_p^n(y) + \frac{n\Gamma\left(n - \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \cdot \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{2}}{2y},$$

(16) $$S_{p-1}^{n-1}(y) + S_{p+1}^{n+1}(y) = 4\, O_p^n(y),$$

(17) $$F_{p-1}^{n-1}(y) - F_{p+1}^{n+1}(y) = 2 D_y F_p^n(y) - (n-p) F_{p+1}^n(y),$$

wo in der letzten Gleichung $F_p^n(y)$ sowohl $O_p^n(y)$ als $S_p^n(y)$ bedeuten kann; die Annahme $p = n$ ergibt unmittelbar die für $O^n(y)$ und $S^n(y)$ bekannten Formeln.

§ 114. Allgemeine Additionsformel von Sonin.

Wir setzen nunmehr voraus, daß $F^\nu(x)$ eine willkürliche Lösung der ersten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen bedeute, daß also:

(1) $$F^{\nu-1}(x) - F^{\nu+1}(x) = 2 D_x F^\nu(x)$$

ist; unter der weiteren Annahme, daß $F^\nu(y-x)$ in eine Taylorsche Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickelbar ist, suchen wir diese Funktion jetzt in eine Neumannsche Reihe erster Art zu entwickeln, wo die Parameter sämtlich ganze Zahlen bedeuten.

Da die Koeffizienten dieser Neumannschen Reihe, dem Satze des § 112 zufolge, auch der Gleichung (1) genügen müssen, erhalten wir:

$$a^0(y) = F^\nu(y),\quad 2a^1(y) = -2D_y F^\nu(y) = F^{\nu+1}(y) - F^{\nu-1}(y)$$

und daraus durch vollständige Induktion folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$2a^n(y) = F^{\nu+n}(y) + (-1)^n F^{\nu-n}(y),$$

so daß wir nach einer Änderung des Vorzeichens von x die Neumannsche Reihe:

$$(2)\quad F^\nu(y+x) = F^\nu(y)J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(F^{\nu-s}(y) + (-1)^s F^{\nu+s}(y)\right)J^s(x)$$

finden, die also überall anwendbar ist, wo die Funktion $F^\nu(y+x)$ nach steigenden Potenzen von x entwickelt werden kann.

Setzen wir weiter voraus, daß sich $F^\nu(x)$ in der Umgebung von $x=0$ regulär verhält, so dürfen wir in (2) $y=0$ annehmen und gelangen so zu der einfacheren Entwicklung:

$$(3)\quad F^\nu(x) = F^\nu(0)J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(F^{\nu-s}(0) + (-1)^s F^{\nu+s}(0)\right)J^s(x).$$

Umgekehrt haben wir in § 112 bewiesen, daß die Formel (2) auch ausreicht, um die Funktionalgleichung (1) herzuleiten; damit haben wir folgenden allgemeinen Satz von Sonin[1]) bewiesen:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Funktion $F^\nu(x)$ eine Additionsformel von der Form (2) *besitze, sind erstens, daß $F^\nu(x)$ der Gleichung* (1) *genügt, und zweitens, daß sich $F^\nu(y+x)$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln läßt.*

Wir betrachten folgende Beispiele solcher Entwicklungen etwas näher:

1) *Die Cylinderfunktionen selbst; hier muß im allgemeinen $|x| < |y|$ vorausgesetzt werden, und nur, wenn die Funktion von der ersten Art ist und zudem einen ganzzahligen Parameter besitzt, kann diese Bedingung wegfallen.*

Die Additionsformel für $J^0(x+y)$ ist von Neumann[2]) gefunden worden, während Lommel[3]) die entsprechende Formel für $J^n(x+y)$ bei positivem ganzem n gegeben hat; Schläfli[4]) hat zuerst die ähnliche Formel für einen willkürlichen Parameter bewiesen.

2) *Die Entwicklungskoeffizienten $A^n(y)$ und $B^n(y)$ des* § 113.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 4; 1880.
2) Theorie der Besselschen Funktionen p. 40; 1867.
3) Studien über die Besselschen Funktionen p. 27; 1868.
4) Mathematische Annalen Bd. 3, p. 136; 1871.

Schläfli[1]) hat die Formeln für $O^n(x+y)$ und $S^n(x+y)$ angegeben; in diesen Fällen muß $|x| < |y|$ angenommen werden; die Entwicklungen für $\mathfrak{O}^n(x+y)$ und $\mathfrak{S}^n(x+y)$ erfordern dieselbe Bedingung.

3) *Die Funktionen* $\Psi^\nu(x)$, $\Omega^\nu(x)$, $\Psi^\nu(x)$, $\Lambda^n(x)$, $\mathsf{M}^n(x)$, $T^n(x)$ *und* $\mathfrak{T}^n(x)$; *hier dürfen* x *und* y *willkürliche endliche Größen sein.*

Die Beispiele 1) und 2) gestatten im allgemeinen keine Entwicklung von der Form (3); dies ist dagegen immer für 3) möglich. Schon in § 22 haben wir diese Entwicklungen für die genannten Funktionen mit Ausnahme von $\mathsf{M}^n(x)$ gegeben; für diese Funktion liefert aber (3) vermöge § 20, (13), (14) folgende Entwicklungen:

$$\mathsf{M}^{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{(n-s)\pi}{4}}{|n-s|} + \frac{\sin^2 \frac{(n+s)\pi}{4}}{n+s} \right) J^{2s}(x), \tag{4}$$

$$\mathsf{M}^{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{\sin^2 \frac{(n-s)\pi}{4}}{|n-s|} - \frac{\sin^2 \frac{(n+s)\pi}{4}}{n+s} \right) J^{2s+1}(x); \tag{5}$$

damit haben wir die in § 22 versprochenen Formeln hergeleitet.

§ 115. Verallgemeinerung von $K^{\nu,n}(x)$. Die Differentialgleichung § 31, (7).

Wir haben noch nachzuweisen, daß die Neumannschen Reihen auch zu eigentümlichen Verallgemeinerungen der Kugelfunktionen Veranlassung geben. Zu dem Ende gehen wir von der Potenzreihe:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

aus und finden so eine Neumannsche Reihe von der Form:

$$f(xyi) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \Gamma(\nu) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} i^n (\nu+n) A^{\nu,n}(y) J^{\nu+n}(x), \tag{1}$$

wo wir der Kürze halber:

$$\Gamma(\nu) A^{\nu,n}(y) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!} a_{n-2s} (2y)^{n-2s} \tag{2}$$

gesetzt haben; die Polynome A werden sonach mit den Kugelfunktionen in dem speziellen Falle identisch, daß $f(x)$ die Exponentialfunktion bedeutet.

---

1) loc. cit. p. 138, 141.

Wir haben nun nachzuweisen, daß diese Polynome A für alle f eine einfache Fundamentalgleichung befriedigen müssen. Um dies einzusehen, differentiieren wir die Formel (1) nach y und erhalten so mit Zuhilfenahme von § 112, (2) die Identität:

$$(3)\quad 2if^{(1)}(xyi) = \Gamma(\nu)\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}\left(D_y A^{\nu,0}(y) J^{\nu-1}(x) + i D_y A^{\nu,1}(y)\right) J^{\nu}(x) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\infty} i^{s-1}\left(D_y A^{\nu,s-1}(y) - D_y A^{\nu,s+1}(y)\right) J^{\nu+s}(x);$$

differentiieren wir nun die Formel (1) nach x, so liefert eine Anwendung von § 112, (4) mittelst (3) die gesuchte Fundamentalgleichung, nämlich:

$$(4)\quad \begin{cases} y D_y A^{\nu,n+1}(y) - y D_y A^{\nu,n-1}(y) = \\ \qquad = (n+1) A^{\nu,n+1}(y) + (2\nu + n - 1) A^{\nu,n-1}(y), \quad n > 1 \\ y D_y A^{\nu,1}(y) = A^{\nu,1}(y). \end{cases}$$

Umgekehrt reichen diese Formeln auch aus, um zu beweisen, daß die Neumannsche Reihe (1), falls sie konvergent ist, eine Funktion des Argumentes (xyi) darstellen muß. Wir bemerken noch ausdrücklich, daß (4) sonach eine der Fundamentalgleichungen der Kugelfunktionen sein muß, da sie ja für alle A gültig ist.

Um endlich die Polynome $A^{\nu,n}(y)$ als Entwicklungsfunktionen anzuwenden, suchen wir in (1) auf beiden Seiten den Koeffizienten der Potenz x^n auf und finden so unmittelbar:

$$(5)\qquad (2y)^n a_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\nu + n - 2s}{s!\,\Gamma(\nu + n - s + 1)} \cdot A^{\nu,n-2s}(y);$$

spezialisieren wir hier den Koeffizienten a_n linker Hand, so erhalten wir die bekannte Entwicklung nach Kugelfunktionen. Durch Anwendung dieser Formel (5) läßt sich sehr leicht die *formale* Entwicklung einer Potenzreihe in y nach den A-Funktionen darstellen; der strenge Nachweis der Konvergenz und die Bestimmung des Konvergenzbereiches bieten dagegen im allgemeinen große Schwierigkeiten dar, wie dies ja auch zu erwarten war, denn dieser Bereich hängt natürlich vom Bildungsgesetze der Koeffizienten a_n ab.

Setzt man $f(x) = e^x$ und $\nu = \frac{1}{2}$, so hat C. Neumann[1]) bekanntlich bewiesen, daß die obenerwähnten Konvergenzbereiche

1) Über die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art. Halle 1862.

Ellipsen mit den Brennpunkten $(\pm 1, 0)$ sind; betrachtet man nun weiter den Fall $\nu = 0$, so findet man leicht:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \frac{1}{y} J^n\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x} O^n\left(\frac{1}{x}\right), \quad |x| < |y|$$

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} n J^n\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x} S^n\left(\frac{1}{x}\right), \quad |x| < |y|.$$

Ist nun die Potenzreihe:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

konvergent, wenn $|x| < \varrho$ ist, und bedeutet C einen mit $|x| = \varrho$ konzentrischen Kreis, dessen Radius eine beliebig kleine Größe, kleiner als ϱ, ist, so führt der Integralsatz von Cauchy zu folgenden zwei Entwicklungen:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n \mathfrak{a}_n}{x} \cdot O^n\left(\frac{1}{x}\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{b}_n}{x} \cdot S^n\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(6\text{a}) \qquad \mathfrak{a}_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(y)}{y} \cdot J^n\left(\frac{1}{y}\right) dy, \quad \mathfrak{b}_n = \frac{n}{2\pi i} \cdot \int_C f(y) J^n\left(\frac{1}{y}\right) dy$$

gesetzt haben; die Reihen (6) sind also anwendbar, falls $|x| < \varrho$ vorausgesetzt wird.

Wir betrachten nunmehr den Spezialfall, in welchem die zu entwickelnde Funktion $f^\varrho(x)$ ein Integral folgender nicht homogener Gleichung ist:

$$(7) \qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{1}{x^2} g^\varrho(x),$$

wo für hinreichend kleine Werte von $|x|$ die Reihenentwicklung:

$$(8) \qquad g^\varrho(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_\varrho \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+s}$$

gültig ist. Setzt man voraus, daß $\nu \pm \varrho$ nicht einer ganzen negativen Zahl gleich ist, so findet man auch für $f^\varrho(x)$ eine mit (8) analoge Entwicklung; somit ist also die Existenz folgender zwei Neumannschen Reihen der ersten Art sicher:

$$(9) \qquad g^\varrho(\alpha x) = \alpha^\varrho \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\varrho + n) b^{\varrho, n}(\alpha) J^{\varrho+n}(x),$$

$$(10) \qquad f^\varrho(\alpha x) = \alpha^\varrho \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\varrho + n) B^{\varrho, n}(\alpha) J^{\varrho+n}(x),$$

die beide für hinlänglich kleine Werte von $|x|$ anwendbar sind und in denen die Koeffizienten ganze Polynome in α sein müssen.

Führt man nun die Entwicklung (10) in (7) ein, so ergibt die Besselsche Differentialgleichung für $J^{\varrho+n}(x)$ die Identität:

$$(11)\quad \alpha^{\varrho}\sum_{n=0}^{n=\infty}(\varrho+n)B^{\varrho,n}(\alpha)\left[1-\alpha^2+\frac{(\varrho+n)^2-\nu^2}{x^2}\right]J^{\varrho+n}(x)=\frac{1}{x^2}g^{\varrho}(x),$$

aus der mittelst (9) und (10) die neue Formel:

$$(12)\quad x^2 f^{\varrho}(x)=\alpha^{\varrho}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho+n}{1-\alpha^2}\left[\left((\varrho+n)^2-\nu^2\right)B^{\varrho,n}(\alpha)-b^{\varrho,n}(\alpha)\right]J^{\varrho+n}(x)$$

hervorgeht; nun findet man aus (7) die weitere Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f^{\varrho}(\alpha x)}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial f^{\varrho}(\alpha x)}{\partial\alpha}-\frac{\nu^2}{\alpha^2}f^{\varrho}(\alpha x)=-x^2 f^{\varrho}(\alpha x)+\frac{1}{\alpha^2}g^{\varrho}(\alpha x);$$

führt man hier die Reihe (10) ein, so gelangt man schließlich mit Zuhilfenahme von (9) und (12) für $B^{\varrho,n}(\alpha)$ zu der nicht homogenen Gleichung:

$$(13)\quad \begin{cases}\alpha^2(1-\alpha^2)\dfrac{\partial^2 B^{\varrho,n}(\alpha)}{\partial\alpha^2}+(2\varrho+1)\alpha(1-\alpha^2)\dfrac{\partial B^{\nu,n}(\alpha)}{\partial\alpha}+\\ \qquad+\left((\varrho^2-\nu^2)+n(n+2\varrho)\alpha^2\right)B^{\varrho,n}(\alpha)=b^{\varrho,n}(\alpha),\end{cases}$$

welche als eine Verallgemeinerung derjenigen für die Kugelfunktionen anzusehen ist; der Formel § 35, (1) zufolge braucht man in der Tat nur $f^{\varrho}(x)=x^{\varrho}e^{ix}$ anzunehmen, um aus (13) die Differentialgleichung der Kugelfunktionen herzuleiten.

Es ist noch zu bemerken, daß (13) für $\alpha=1$ folgende bemerkenswerte Formel liefert:

$$(14)\qquad B^{\varrho,n}(1)=\frac{b^{\varrho,n}(1)}{(\varrho+\nu+n)(\varrho-\nu+n)},$$

eine Formel, welche uns ein eigentümliches Korrespondenzprinzip für die Entwicklung der Funktionen $g^{\varrho}(x)$ und $f^{\varrho}(x)$ in eine Neumannsche Reihe bietet. So liefern zum Beispiel die Entwicklungen § 108, (1) und § 109, (7) in Verbindung mit den Differentialgleichungen für $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ und $\Phi^{\nu,\varrho}(x)$ folgende neue Entwicklungen:

$$(15)\quad \Pi^{\nu,\varrho}(x)=\frac{\cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}\right)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\varrho+2s)\Gamma(\varrho+s)}{s!\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s\right)\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s\right)}\cdot J^{\varrho+2s}(x),$$

$$(16)\quad \Phi^{\nu,\varrho}(x)=\frac{2\cdot i^{\varrho-\nu}}{\Gamma(\varrho+\nu)\Gamma(\varrho-\nu)}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{i^{-s}(\varrho+s)\Gamma(2\varrho+s)}{s!(\varrho+\nu+s)(\varrho-\nu+s)}\cdot J^{\varrho+s}(x),$$

die also in der ganzen x-Ebene anwendbar sind; für $\varrho = 0$ erhält man die Reihen § 22, (16), (18) wieder. Setzt man noch in (15) $\varrho = \nu + 1$, so findet man mittelst § 30, (7) folgende andere Entwicklung:

$$(17)\qquad Z^{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s+1)\,\Gamma(\nu+s+\frac{1}{2})}{s!\,(s+1)(\nu+s+\frac{1}{2})} \cdot J^{\nu+2s+1}(x),$$

die für ein ganzes und nicht negatives ν von P. Siemon[1] gefunden worden ist. Auf dieselbe Weise gewinnt man aus § 109, (3) die Entwicklung § 39, (7) wieder.

Kapitel XXI.

Die Neumannschen Reihen zweiter Art.

§ 116. Allgemeine Formeln.

Wir betrachten nunmehr die unendliche Reihe:

$$(1)\qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\varrho+\nu}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\frac{\nu+s}{2}}(x) J^{\frac{\varrho+s}{2}}(x),$$

in der die Koeffizienten a_s von x unabhängig sein sollen; führen wir in diese Reihe für jedes Produkt zweier Cylinderfunktionen die Reihe § 6, (4) ein, so erhalten wir eine Doppelreihe, die analog zu Δ in § 102 ist. Wir ordnen nun die Glieder dieser Doppelreihe nach steigenden Potenzen von x und finden eine Gleichung von der Form:

$$(2)\qquad \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\frac{\nu+s}{2}}(x) J^{\frac{\varrho+s}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

wo wir der Kürze halber:

$$(3)\qquad \Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2}+1\right) b_n = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n+\frac{\nu+\varrho}{2}}{s} a_{n-2s}$$

gesetzt haben.

---

1) Programm der Luisenschule, Berlin 1890.

Wir setzen beispielsweise zunächst $a_{2s} = 1$, $a_{2s+1} = 0$ und gelangen so zu der eleganten Formel:

$$(4)\qquad \int x^{\nu-\varrho} J^{\nu-1}(x) J^{\varrho}(x)\, dx = x^{\nu-\varrho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} J^{\nu+s}(x) J^{\varrho+s}(x),$$

aus der für $\nu = \varrho = \frac{1}{2}$ folgende Entwicklung für den Integralsinus:

$$(5)\qquad S_i(2x) = \pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(J^{s+\frac{1}{2}}(x)\right)^2$$

hervorgeht, die auf andre Weise von Lommel[1]) gefunden worden ist.

Weiter setzen wir:

$$\varrho = \nu - 1, \quad a_{2s} = (-1)^s \binom{\frac{1}{2}}{s}, \quad a_{2s+1} = 0$$

und erhalten so mittelst (Γ_4) die bemerkenswerte Formel:

$$(6)\qquad J^{2\nu}(2x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\frac{1}{2}}{s} J^{\nu+s}(x) J^{\nu+s-\frac{1}{2}}(x),$$

welche als die umgekehrte Formel zu § 107, (4) angesehen werden kann.

Kehren wir nun zur allgemeinen Gleichung (3) zurück, so ist offenbar, daß sie genau von derselben Form wie § 107, (2) ist; wir finden also mittelst § 107, (6) für a_n den allgemeinen Ausdruck:

$$(7)\qquad a_n = \left(\frac{\nu+\varrho}{2} + n\right) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2} + n - s\right) \Gamma\left(\frac{\nu+n}{2} - s + 1\right) \Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2} - s + 1\right)}{s!\, \Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2} + n - 2s + 1\right)} b_{n-2s},$$

vorausgesetzt allerdings, daß keine der drei Zahlen $\frac{\nu}{2}$, $\frac{\varrho}{2}$, $\frac{\nu+\varrho}{2}$ negativ ganz ist. Diese Bestimmung von a_n ist also eindeutig, und die gewöhnliche Methode führt somit zu folgendem allgemeinen Satze:

V. *Wenn keine der drei Zahlen* $\frac{\nu}{2}$, $\frac{\varrho}{2}$, $\frac{\nu+\varrho}{2}$ *negativ ganz ist, kann eine Potenzreihe immer eindeutig in eine Reihe entwickelt werden, welche nach Produkten zweier Cylinderfunktionen fortschreitet:*

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \left(\frac{x}{2}\right)^s = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\frac{\nu+n}{2}}(x) J^{\frac{\varrho+n}{2}}(x),$$

---

1) Abhandlungen der Münchener Akademie Bd. 14, p. 550; 1884.

in der sich die Koeffizienten a_n aus der Formel:

$$a_n = \left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n-s\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2}-s+1\right)}{s!\,\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n-2s+1\right)}\,b_{n-2s}$$

bestimmen lassen. Diese Neumannsche Reihe zweiter Art hat genau dieselben Eigenschaften wie diejenige der ersten Art.

Für den Fall, daß $\nu=\varrho=0$ oder $\nu=\varrho=\frac{1}{2}$ und sonst alle Parameter der Cylinderfunktionen ganze Zahlen sind, ist dieser Satz zuerst von Neumann[1]) aufgestellt worden, während Lommel[2]) einzelne Potenzen von x in eine solche Reihe entwickelt hat. Gegenbauer[3]) gibt den allgemeineren Fall $\nu=\varrho$, während Kapteyn[4]) den Fall mit lauter ganzen Parametern von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus untersucht hat.

§ 117. Anwendungen. Entwicklung von $\frac{1}{y-x}$.

Obgleich die Neumannschen Reihen zweiter Art in der Theorie der Cylinderfunktionen nicht eine so wichtige Rolle zu spielen scheinen wie diejenigen der ersten Art, so gestatten sie doch einige interessante Anwendungen.

So gewinnen wir zum Beispiel folgende zwei Entwicklungen:

$$(1)\quad\begin{cases} x^{-\varrho}\int x^{\varrho-1}J^{\mu}(x)J^{\nu}(x)\,dx = \dfrac{J^{\mu}(x)J^{\nu}(x)}{\mu+\nu+\varrho} - \\ \quad -\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\varrho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}\right)}\cdot\displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(\mu+\nu+2s)\,\Gamma\left(s+\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}\right)}{\Gamma\left(s+1+\frac{\mu+\nu+\varrho}{2}\right)}J^{\mu+s}(x)J^{\nu+s}(x), \end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases} x^{-\varrho}\int x^{\varrho}\left(J^{\mu-1}(x)J^{\nu}(x)+J^{\mu}(x)J^{\nu-1}(x)\right)dx = \\ \quad =\dfrac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\varrho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}\right)}\cdot\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma\left(s+\frac{\mu+\nu-\varrho}{2}\right)\left(\mu+\nu+2s\right)}{\Gamma\left(s+1+\frac{\mu+\nu+\varrho}{2}\right)}J^{\mu+s}(x)J^{\nu+s}(x); \end{cases}$$

1) Sitzungsberichte der Leipziger Akademie 1869, p. 221—256. Mathematische Annalen Bd. 2, p. 192; Bd. 3, p. 581—610.

2) Studien über die Besselschen Funktionen p. 48; 1868.

3) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 75 II, p. 216—222; 1877.

4) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10; 1893.

für $\varrho = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{1}{2}$, liefert (1) die speziellere Formel:

$$(3)\qquad S_i(2x) = \pi x\left(J^{\frac{1}{2}}(x)J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{8s}{4s^2-1}J^{s+\frac{1}{2}}(x)J^{s-\frac{1}{2}}(x)\right).$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir:

$$(4)\qquad \cos 2x = \frac{\pi}{2}\left(J^{\frac{1}{2}}(x)J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s 4s J^{s+\frac{1}{2}}(x)J^{s-\frac{1}{2}}(x)\right),$$

$$(5)\qquad \sin 2x = 2x - 2\pi x \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} J^{s+\frac{1}{2}}(x)J^{s-\frac{1}{2}}(x);$$

diese fünf Formeln sind also in der ganzen x-Ebene anwendbar.

Für eine einzige Potenz erhalten wir die Entwicklung:

$$(6)\qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\varrho+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\nu+\varrho+2s}{\nu+\varrho+s}\binom{\nu+\varrho+s}{s}J^{\nu+s}(x)J^{\varrho+s}(x);$$

für ν und ϱ gleich der Hälfte einer positiven ungeraden Zahl ist diese Formel zuerst von Lommel[1]) angegeben worden.

Setzen wir weiter in (6) $\nu + \varrho = 0$ oder $\nu + \varrho = 1$, so gelangen wir durch die in § 108 angewendete Methode beziehentlich zu folgenden zwei Formeln:

$$(7)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(2s)^{2n}J^{s+\nu}(x)J^{s-\nu}(x) = \sum_{p=1}^{p=n}\frac{(2p)!\,\mathfrak{A}_{2n}^{2n-2p}}{\Gamma(p+1+\nu)\Gamma(p+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty}(2s+1)^{2n+1}J^{s+\nu}(x)J^{s+1-\nu}(x) = \sum_{p=0}^{p=n}\frac{(2p+1)!\,\mathfrak{A}_{2n+1}^{2n-2p+1}}{\Gamma(p+1+\nu)\Gamma(p+2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1},$$

in denen die Koeffizienten $\mathfrak{A}$ dieselben wie in § 108 sind. Beide Formeln sind ja der Schlömilchschen Entwicklung § 108, (5) ganz ähnlich, sie bieten aber größere Eigentümlichkeiten dar, indem wir wegen der letzten Gammafunktionen im Nenner rechter Hand folgenden Satz finden:

Wenn ν gleich einer ganzen Zahl und größer als n, bez. $n+1$ angenommen wird, haben die unendlichen Reihen linker Hand in (7), (8) *beide die Summe Null.*

Es ist indessen offenbar, daß diese Nullentwicklungen nur *formale* Identitäten sein können, weil sich ja beide unendliche Reihen als Potenzreihen schreiben lassen.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 2, p. 633; 1870.

Wir betrachten ferner die Neumannsche Reihe zweiter Art:

$$(9) \qquad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \mathfrak{U}^{\nu,\varrho,n}(y) J^{\frac{\nu+n}{2}}(x) J^{\frac{\varrho+n}{2}}(x), \quad |x| < |y|,$$

wo $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ für $n > 0$ anzunehmen ist, und wo man:

$$(10) \begin{cases} \mathfrak{U}^{\nu,\varrho,n}(y) = \dfrac{\nu+\varrho+2n}{4} \cdot \\ \cdot \displaystyle\sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-p+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2}-p+1\right)}{\nu+\varrho+2n-2p} \binom{\frac{\nu+\varrho}{2}+n-p}{p} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}, \\ \mathfrak{U}^{\nu,\varrho,0}(y) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho}{2}+1\right)} \cdot \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

gesetzt hat. Im allgemeinen genügt diese in y rationale Funktion $\mathfrak{U}^{\nu,\varrho,n}(y)$ einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung der vierten Ordnung, in welcher der Differentialausdruck linker Hand zu dem in § 112, 15 analog ist. In dem Spezialfalle $\varrho = \nu$ erhält man für die Funktion:

$$(11) \qquad z = \mathfrak{U}^{\nu,\nu,n}(y) = \mathfrak{U}^{\nu,n}(y)$$

folgende Gleichung dritter Ordnung:

$$(12) \begin{cases} z^{(3)} + \dfrac{4-2\nu}{y} z^{(2)} + \\ + \left(4 + \dfrac{1-n^2+\nu(\nu-n-4)}{y^2}\right) z^{(1)} + \left(\dfrac{8-4\nu}{y} + \dfrac{(n+1)(n-1-\nu)(1+\nu)}{y^3}\right) z = A_n(y), \end{cases}$$

wo man der Kürze halber:

$$(13) \qquad A_{2n}(y) = \frac{\nu+2n}{2} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\right)^2}{\nu+n} \binom{\nu+n}{n} (1-\nu) \left(\frac{2}{y}\right)^2,$$

$$(13a) \qquad A_{2n+1}(y) = -\nu \cdot \frac{\nu+2n+1}{2} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)\right)^2}{\nu+n+1} \binom{\nu+n+1}{n} \left(\frac{2}{y}\right)^3$$

gesetzt hat. Für $\nu = 0$ nimmt (12) die elegante Form:

$$(14) \qquad z^{(3)} + \frac{4}{y} z^{(2)} + \left(4 + \frac{1-n^2}{y^2}\right) z^{(1)} + \left(\frac{8}{y} + \frac{n^2-1}{y^3}\right) z = \frac{4\cos^2\frac{n\pi}{2}}{y^2}$$

an, und damit haben wir eine neue Analogie zwischen den Neumannschen Reihen der ersten und der zweiten Art nachgewiesen.

Ist keine der drei Zahlen $\frac{\nu}{2}$, $\frac{\varrho}{2}$, $\frac{\nu+\varrho}{2}$ eine ganze Zahl, so ist es auch möglich, eine sogenannte Laurentsche Reihe im ganzen

Kreisringe der Konvergenz nach Produkten zweier Cylinderfunktionen zu entwickeln[1]), wir gehen indessen auf diese Frage hier nicht näher ein.

Hier brechen wir unsere Untersuchungen über die Neumannschen Reihen ab. Die zwei folgenden Entwicklungen sind ja in der Tat nicht eigentliche Neumannsche Reihen; gleichwohl ziehen wir es vor, sie in diesem Kapitel hier einzufügen.

§ 118. Andere Entwicklungen nach Produkten zweier Cylinderfunktionen.

Wir gehen noch einmal von der Formel § 109, (3) aus, indem wir sie folgendermaßen schreiben:

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho} J^{-\varrho}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(\nu+2n)\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(n+1-\varrho)} \binom{-\varrho-\nu}{n} J^{\nu+2n}(x),$$

und setzen nun in dieser Formel nacheinander $\nu+1$, $\nu+2$, $\cdots$ für ν, so daß wir leicht folgende allgemeine Entwicklung finden:

$$(2) \qquad J^{-\varrho}(x) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+\varrho} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x),$$

in der wir der Kürze halber:

$$(3) \qquad a_n = (\nu+n) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-s)}{\Gamma(s+1-\varrho)} \binom{-\varrho-\nu-n+2s}{s} b_{n-2s}$$

gesetzt haben.

Sehen wir von dem speziellen Falle ab, in welchem die durch die Potenzreihe linker Hand in (2) dargestellte Funktion in den Nullstellen von $J^{-\varrho}(x)$ Pole erster Ordnung hat, sonst aber keine endliche singuläre Stelle besitzt, so hat die Entwicklung rechter Hand in (2) die gewöhnlichen Eigenschaften einer Neumannschen Reihe; denn die Multiplikation mit der Cylinderfunktion linker Hand kann ja in diesem Falle die Konvergenz oder Divergenz der Potenzreihe gar nicht ändern.

Setzen wir weiter in (2) $\varrho - 1$ für ϱ, $\nu + 1$ für ν, so gelangen wir zu folgender ähnlicher Formel:

$$(4) \qquad J^{-\varrho+1}(x) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+\varrho} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n' J^{\nu+n+1}(x),$$

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung in Mathematische Annalen Bd. 52.

in welcher:

$$(5)\quad a_n' = (\nu + n + 1) \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu + n - s + 1)}{\Gamma(s + 2 - \varrho)} \binom{-\varrho - \nu - n + 2s}{s} b_{n-2s}$$

gesetzt ist. Multiplizieren wir nun die Formel (4) mit $J^{\varrho}(x)$, die Formel (2) aber mit $J^{\varrho-1}(x)$, so gewinnen wir durch Anwendung der Lommelschen Fundamentalformel für die gegebene Potenzreihe die neue Entwicklung:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} b_s \left(\frac{x}{2}\right)^s = \\ = \frac{\pi \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+\varrho-1}}{\sin \pi\varrho} \left(J^{\varrho-1}(x) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}(x) + J^{\varrho}(x) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n' J^{\nu+n+1}(x) \right) \end{cases}$$

damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

VI. *Wenn ϱ keine ganze Zahl ist und ν nicht negativ ganz angenommen wird, so läßt sich eine Potenzreihe mittelst der Formel (6) entwickeln, und die so erhaltene Cylinderfunktionenreihe hat genau dieselben Eigenschaften wie eine gewöhnliche Neumannsche Reihe.*

Die Entwicklungskoeffizienten dieser neuen Reihe sind indessen recht kompliziert; noch schlimmer wird die Sache, wenn ϱ eine ganze Zahl bedeutet, denn in diesem Falle wird der Ausdruck rechter Hand in (6) unbestimmt, und die notwendige Differentiation nach ϱ macht die Koeffizienten sehr zusammengesetzt.

§ 119. Über die Reihe $\Sigma a_n J^{\nu+n}(x) J^{\varrho-n}(x)$.

Wir gehen endlich von der Formel § 6, (4) aus und finden nach einer leichten Umformung die Potenzreihe:

$$(1)\quad \begin{cases} J^{\nu+n}(x) J^{\varrho-n}(x) = \\ = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\nu+\varrho+2s}{s} \cdot \frac{(\varrho+s)(\varrho+s-1)\cdots(\varrho+s-n+1)}{(\nu+s+1)(\nu+s+2)\cdots(\nu+s+n)} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho+2s}}{\Gamma(\nu+s+1)\Gamma(\varrho+s+1)} \end{cases}$$

weiter bezeichnen wir mit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ willkürliche Koeffizienten, welche nur so beschaffen sein müssen, daß die Reihe:

$$(2)\quad F(\nu, \varrho) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-s+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)}$$

unbedingt konvergent ist, falls $\Re(\nu) > \Omega$ [1]) vorausgesetzt wird; wir erhalten so ohne Schwierigkeit aus (1) die Entwicklung:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\nu+p}(x) J^{\varrho-p}(x) = \\ \qquad = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \binom{\nu+\varrho+2s}{s} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho+2s}}{\Gamma(\nu+s+1)\Gamma(\varrho+s+1)} \cdot F(\nu+s,\, \varrho+s), \end{cases}$$

die anwendbar ist, wenn nur $\Re(\nu) > \Omega$ angenommen wird; denn in diesem Falle wird die Reihe rechter Hand unbedingt konvergent.

Setzt man zum Beispiel $a_s = (-1)^s$, so findet man mittelst einer **Stirlingschen** Formel:

$$F(\nu, \varrho) = \frac{\nu}{\nu + \varrho}, \qquad \Re(\nu + \varrho) > 0;$$

mithin ergibt (3) in dem speziellen Falle $\varrho = \nu$ folgende bemerkenswerte Formel:

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\left(J^\nu(x)\right)^2 = \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} J^{\nu+p}(x) J^{\nu-p}(x), \quad \Re(\nu) > 0.$$

Führt man ferner in der folgenden Reihe für jedes Produkt zweier J-Funktionen die entsprechende Reihe (1) ein und setzt man außerdem $|a| < 1$ voraus, so findet man:

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-\nu-2p} J^{\nu+p}(x) J^{-p}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a^{-\nu-2s}(1+a^2)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s};$$

nun ist in dieser Formel die Reihe rechter Hand offenbar nichts anderes als eine Cylinderfunktion; dies führt zu der merkwürdigen Formel:

$$(5)\qquad J^\nu\left(ax + \frac{x}{a}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-\nu-2p} J^{\nu+p}(x) J^{-p}(x), \qquad |a| < 1.$$

Setzt man hier endlich x für ax und y für $\frac{x}{a}$, so gewinnt man folgende neue Additionsformel:

$$(6)\quad J^\nu(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{-p-\frac{\nu}{2}} J^{\nu+p}(\sqrt{xy}) J^{-p}(\sqrt{xy}), \qquad |x| < |y|,$$

welche nicht mit den vorhergehenden in den §§ 104, 111, 114 gegebenen Additionsformeln zusammenfällt.

---

1) Man vergleiche meine Abhandlung über die Fakultätenreihen in Annales de l'École Normale (3) Bd. 19; 1902.

Nimmt man in (5) ν gleich der ganzen, nicht negativen Zahl n an, so kann die Bedingung $|\alpha| < 1$ wegfallen, und die Formel wird für jeden endlichen Wert von α anwendbar.

Die Annahme $\alpha = e^{i\theta}$ führt zum Beispiel mittelst (5) zu den in § 22, (8) und (9) für ganze ν gegebenen Fourierschen Reihen, welche zuerst von Schläfli gefunden worden sind.

Kapitel XXII.

Die Kapteynschen Reihen erster und zweiter Art.

§ 120. Formale Entwicklung von x^ν in eine Reihe der ersten Art.

In den letzten Jahren hat W. Kapteyn[1]) eine neue Entwicklung einer Potenzreihe nach Cylinderfunktionen gegeben, welche wir hier zu verallgemeinern haben. Zu dem Ende setzen wir für den Augenblick voraus, daß es möglich sei, die Potenz x^ν in eine Reihe von folgender Form zu entwickeln:

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n}^\nu J^{\nu+2n}\big((\nu+2n)x\big)$$

und daß es weiterhin möglich sei, diese Reihe dadurch in eine Potenzreihe umzuformen, daß wir für jede Cylinderfunktion rechter Hand die gewöhnliche Entwicklung einführen. Eine solche Umformung der Reihe liefert aber zur Bestimmung der noch unbekannten Koeffizienten α_{2n}^ν die Gleichungen:

$$(2) \qquad 1 = \frac{\nu^\nu}{0!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot \alpha_0^\nu$$

und allgemeiner, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$(3) \qquad 0 = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s(\nu+2s)^{\nu+2n}}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+n+s+1)} \cdot \alpha_{2s}^\nu.$$

Aus diesen Gleichungen findet man durch vollständige Induktion für die Koeffizienten α den allgemeinen Ausdruck:

$$(4) \qquad \alpha_{2n}^\nu = \frac{\nu^2}{n!} \cdot \frac{\Gamma(\nu+n)}{(\nu+2n)^{\nu+1}};$$

---

1) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10; 1893

in der Tat leuchtet ja ein, daß wir für kleine Werte von n wirklich Ausdrücke von der Form (4) erhalten. Setzen wir nun voraus, daß (4) für $\alpha_0^\nu, \alpha_2^\nu, \ldots, \alpha_{2n-2}^\nu$ richtig sei, so haben wir aus (3) den Koeffizienten α_{2n}^ν zu bestimmen. Führen wir in diese Formel wirklich die Ausdrücke für die vorhergehenden Koeffizienten ein, so kommt es offenbar darauf an, die Gleichheit:

$$(5) \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p \Gamma(\nu+p)(\nu+2p)^{2n-1}}{\Gamma(\nu+n+p+1)} \binom{n}{p} = 0$$

nachzuweisen; denn dann und nur dann erhalten wir für α_{2n}^ν den Ausdruck (4).

Die Formel (5) läßt sich aber ohne Mühe durch vollständige Induktion beweisen; um dies zu erreichen, setzen wir der Kürze halber:

$$X_n^r = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p \Gamma(\nu+p)(\nu+2p)^{2r-1}}{\Gamma(\nu+n+p+1)} \binom{n}{p}$$

und finden dann durch eine einfache Reduktion:

$$4n\, X_{n-1}^{n-1} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\Gamma(\nu+p)\, 4(n-p)(\nu+n+p)}{\Gamma(\nu+n+p+1)} (\nu+2p)^{2n-3} = 0,$$

da sich die Gleichung (5) für kleine Werte von n leicht beweisen läßt und wir sie für $n-1$ als gültig annehmen; addiert man nun aber diesen Ausdruck für $4n\, X_{n-1}^{n-1}$ zu X_n^n, so erhalten wir:

$$X_n^n = (\nu+2n)^2 \cdot \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p \Gamma(\nu+p)(\nu+2p)^{2n-3}}{\Gamma(\nu+n+p+1)} \binom{n}{p} = (\nu+2n)^2 X_n^{n-1},$$

woraus durch Wiederholung dieses Prozesses die allgemeinere Formel:

$$X_n^n = (\nu+2n)^{2n-2} X_n^1$$

hervorgeht; nun findet man aber für X_n^1 folgenden anderen Ausdruck:

$$X_n^1 = \nu \cdot \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{\Gamma(\nu+p)}{\Gamma(\nu+n+p+1)} -$$
$$- 2n \cdot \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \binom{n-1}{p} \frac{\Gamma(\nu+p+1)}{\Gamma(\nu+n+p+2)};$$

die Prinzipien der Differenzenrechnung ergeben dann ohne weiteres, daß X_n^1 und somit auch X_n^n gleich Null sein muß; also ist (4) allgemein bewiesen.

Es erhellt, daß unser Beweis hinfällig wird, sobald ν gleich Null oder einer ganzen negativen Zahl angenommen wird; im ersten Falle hat man:

$$\alpha_0^0 = 1, \quad \alpha_{2n}^0 = 0, \quad n > 0,$$

während im zweiten Falle die Gleichungen (2) und (3) nicht mehr die Koeffizienten α_{2n}^ν bestimmen.

§ 121. **Unbedingte Konvergenz der Entwicklung für x^ν.**

Wir haben nun zu beweisen, daß die unendliche Reihe:

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!\,(\nu+2n)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+2n}\big((\nu+2n)x\big)$$

unbedingt konvergiert, falls $|x|$ eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Zu diesem Zwecke wenden wir die aus § 2, (3) erhaltene Ungleichheit:

$$J^\omega(\xi) < \frac{|\xi^\omega|}{|2^\omega|\,|\Gamma(\omega+1)|} \cdot e^{\left|\frac{\xi^2}{4\omega}\right|}$$

an, wo $\Re(\omega)$ als positiv und sehr groß anzunehmen ist. Bezeichnet nun weiter u_n das allgemeine Glied unter dem Summenzeichen in (1), so finden wir:

$$|u_n| < \frac{|\nu+2n|^{2n-1} e^{\left|\frac{\nu x^2}{4}\right|} \cdot \left|\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\right|}{n!\,|\nu+n|\cdot|\nu+n+1|\cdots|\nu+2n|} \left(\left|\frac{x}{2}\right| e^{\left|\frac{x^2}{4}\right|}\right)^{2n},$$

so daß die Stirlingsche Formel (Γ_5) zu der weiteren Ungleichheit:

$$|u_n| < K\cdot\left(\left|\frac{x}{2}\right| e^{1+\left|\frac{x^2}{4}\right|}\right)^{2n}$$

führt, wo K eine endliche positive Größe bedeutet; der zuletzt gefundene Ausdruck ist einem von Cauchy[1]) gegebenen sehr ähnlich.

Diese Überlegungen zeigen uns aber, daß die Reihe (1) wie eine Potenzreihe konvergiert, falls $|x| < \Omega(1)$ angenommen wird, wo $\Omega(1)$ die positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{x}{2}\cdot e^{1+\frac{x^2}{4}} = 1$$

bedeutet oder nach Kapteyn[2]) näherungsweise:

$$(3) \qquad \Omega(1) = 0{,}659\cdots$$

1) Comptes rendus Bd. 13, p. 687; 1841.

2) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10, p. 120; 1893.

ist. Als Corollar zu dem vorhergehenden Resultate erhalten wir also den Satz, daß die Summe der Reihe:

$$(4)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{|\Gamma(\nu+n)| \cdot \left|\left(\frac{\nu+2n}{2}x\right)^{\nu+2n+2p}\right|}{n!\,p!\,|(\nu+2n)^{\nu+1}| \cdot |\Gamma(\nu+2n+p)|}$$

mit unendlich wachsendem n der Grenze Null zustrebt, wenn nur $|x| < \Omega(1)$ ist, ein Resultat, das uns bald sehr nützlich sein wird.

Nach diesen Erörterungen schreiben wir die Reihe (1) als Doppelreihe, indem wir für jede Cylinderfunktion die entsprechende Reihenentwicklung einführen, und zwar schreiben wir sie so, daß die Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, die Vertikalreihen bilden. Nun haben wir soeben bewiesen, daß die Horizontalreihen allesamt unbedingt konvergieren, wenn nur $|x| < \Omega(1)$ vorausgesetzt wird. Die Vertikalreihen haben, von der ersten abgesehen, sämtlich die Summe Null, wie deutlich aus § 120, (5) hervorgeht, während die erste Vertikalreihe die Summe $x^\nu : (2^\nu \nu^2)$ besitzt; damit haben wir aber folgenden Hilfssatz bewiesen:

Wenn ν eine endliche Größe bedeutet, welche keine ganze negative Zahl ist, sonst aber ganz willkürlich sein kann, ist die Entwicklung:

$$(5)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \nu^2 \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+2s}\big((\nu+2s)x\big)$$

jedenfalls unbedingt konvergent, wenn nur $|x| < \Omega(1)$ vorausgesetzt wird, und diese Entwicklung ist nur auf eine Weise möglich.

Wenn ν gleich Null ist, reduziert sich (5) *auf die Identität* $1 = 1$.

Setzen wir ν als positiv und ganz voraus, so finden wir nach der in § 108 angewendeten Methode folgende elegante Formel:

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{J^{2n+\varepsilon}\big((2n+\varepsilon)x\big)}{(2n+\varepsilon)^{2p}} = \sum_{r=0}^{r=p-1} \mathfrak{B}^{2p}_{2r+\varepsilon} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\varepsilon},$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, während ε gleich 1 oder 2 zu setzen ist, und wo wir der Kürze halber:

$$(7)\qquad \mathfrak{B}^{2p}_{2r+\varepsilon} = \frac{1}{(2r+\varepsilon)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^s \binom{2r+\varepsilon}{s}}{(2r-2s+\varepsilon)^{2p-2r-\varepsilon}}, \quad p > r \geqq 0,$$

gesetzt haben; die Zahlen $\mathfrak{B}$, für welche $r \geqq p$ ist, müssen demnach verschwinden.

Die Formel (6) hat Ähnlichkeit mit § 108, (5).

§ 122. Die allgemeine Kapteynsche Reihe der ersten Art.

Wir betrachten nunmehr die Potenzreihe:

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{2}\right) + a_2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots$$

mit dem Konvergenzradius ϱ; die einzelnen Glieder dieser Reihe können nun mittelst § 121, (5) in eine Kapteynsche Reihe verwandelt werden, wenn wir nur in der obenerwähnten Formel $\nu+1,\ \nu+2,\ \nu+3, \cdots$ für ν setzen und dann durch $x^\nu : 2^\nu$ dividieren. Auf diese Weise erhalten wir eine Doppelreihe, deren Horizontalreihen von den obenerwähnten Kapteynschen Reihen gebildet werden; wir denken uns sie so geschrieben, daß die Glieder mit derselben Cylinderfunktion die Vertikalreihen unserer Doppelreihe bilden.

Es ist dann offenbar, daß die Horizontalreihen sämtlich unbedingt konvergieren, wenn erstens $|x| < \Omega(1)$ und zweitens $|x| < \varrho$ angenommen wird. Wenden wir uns nun zu den Vertikalreihen unserer Doppelreihe, so finden wir im allgemeinen:

$$(2)\qquad S_n = \frac{J^{\nu+n}\big((\nu+n)x\big)}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2p)^2\,\Gamma(\nu+n-p)}{p!\,(\nu+n)^{n-2p}} \cdot a_{n-2p};$$

wir haben daher noch die Bedingungen dafür zu finden, daß auch die aus (2) mit unendlich wachsendem n erhaltene unendliche Reihe unbedingt konvergiert. Offenbar dürfen wir uns dann darauf beschränken, n als gerade Zahl anzunehmen, denn der Fall, wo n ungerade ist, läßt sich auf ganz dieselbe Weise behandeln.

Wir setzen also:

$$S_{2n} = \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!\,(\nu+2n)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+2n}\Big((\nu+2n)x\Big) \cdot \sum_{p=0}^{p=n} (\nu+2p)^2 a_{2p} u_{2p},$$

wo der Kürze halber:

$$u_{2p} = \frac{(\nu+n)(\nu+n+1)\cdots(\nu+n+p-1)\cdot n(n-1)\cdots(n-p+1)}{(\nu+2n)^{2p}}$$

gesetzt worden ist; außerdem führen wir der Bequemlichkeit wegen folgende Bezeichnung ein:

$$v_p = \frac{u_{2p+2}}{u_{2p}} = \frac{(\nu+n+p)(n-p)}{(\nu+2n)^2}.$$

Nun finden wir für endliche, aber hinreichend große Werte von n, daß sich $|v_p|$ mit wachsendem n mehr und mehr dem Werte

$1:4$ nähert; hierüber behaupte ich, daß $|r_p| > |r_{p+1}|$ sein muß, falls nur n und p hinlänglich groß angenommen werden; es leuchtet nämlich ein, daß dann:

$$(n - p)(n + p + |\nu|) < (2n - |\nu|)^2$$

sein muß. Wir bezeichnen ferner mit A den größten Wert, welchen

$$|a_{2s}| \cdot 2^{-2s}$$

überhaupt annehmen kann, und finden somit durch Zuhilfenahme der Formeln des vorhergehenden Paragraphen, daß:

$$|S_{2n}| < nA \cdot |\nu + 2n|^2 \left(\left| \frac{x}{2} \right| e^{1 + \left| \frac{x^2}{4} \right|} \right)^{2n}.$$

sein muß, so daß die Vertikalreihen S_n jedenfalls unbedingt konvergieren, wenn zugleich $|x| < \Omega(1)$ und $|x| < \Omega(\varrho)$ angenommen wird, wo $\Omega(\varrho)$ die positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$\text{(3)} \qquad \frac{x}{2} \cdot e^{1 + \frac{x^2}{4}} = \varrho$$

bedeutet; damit haben wir folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

VII. *Wenn ν eine endliche Größe bedeutet, die jedoch keiner ganzen negativen Zahl gleich sein darf, läßt sich die Potenzreihe:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

mit dem Konvergenzradius ϱ in eine Kapteynsche Reihe der ersten Art:

$$\text{(4)} \qquad f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n^\nu}{(\nu + n)^{\nu+1}} \cdot J^{\nu+n}\big((\nu + n)x\big)$$

entwickeln, wo sich die Koeffizienten b_n^ν aus der Formel:

$$\text{(5)} \qquad b_n^\nu = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu + n - 2p)^2\, \Gamma(\nu + n - p)}{p!\,(\nu + n)^{n-2p}} \cdot a_{n-2p}$$

berechnen lassen. Die Entwicklung (4) *ist eindeutig bestimmt, und die so erhaltene Cylinderfunktionenreihe ist jedenfalls unbedingt konvergent, falls $|x| < \Omega(1)$ und $|x| < \Omega(\varrho)$ angenommen wird; wenn $\nu = 0$ ist, reduziert sich das erste Glied rechter Hand in* (4) *auf a_0.*

Kapteyn[1]) hat diesen Satz für den Fall $\nu = 0$ und $\varrho \geqq 1$ bewiesen.

Wir haben also die Existenz der Kapteynschen Reihe in aller Strenge nachgewiesen; wir wissen aber nicht, ob der obenerwähnte

---

1) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10, p. 120; 1893.

Kreis, in dessen Innern die Reihe sicher unbedingt konvergiert, wirklich mit dem vollständigen Bereiche der unbedingten Konvergenz dieser Reihe zusammenfällt; daß dieser Kreis jedenfalls mit dem Bereiche der Konvergenz einer Kapteynschen Reihe überhaupt nicht zusammenfällt, ist außer allem Zweifel, wie die aus der Keplerschen Gleichung hergeleitete Formel § 23, (6) deutlich zeigt.

Im allgemeinen scheinen die Bereiche der unbedingten und der bedingten Konvergenz einer Kapteynschen Reihe nicht identisch zu sein, so daß es einen endlichen Bereich der x-Ebene geben muß, in welchem die Kapteynsche Reihe nur bedingt konvergiert und doch eine analytische Funktion von x darstellen muß, ein Verhältnis, welches ich schon bei gewissen Fakultätenreihen nachgewiesen habe[1].

Indessen scheint die allgemeine Beantwortung der Frage nach dem Konvergenzbereich einer Kapteynschen Reihe recht schwierig zu sein; man muß nämlich zuerst den asymptotischen Wert von $J^\nu(\nu x)$ bestimmen, wenn $\Re(\nu)$ äußerst groß und positiv angenommen wird, während x eine endliche Größe bedeutet. Bisher hat man aber nur den Fall bemeistern können[2], in welchem ν positiv und x reell angenommen werden, und selbst dieser spezielle Fall bietet noch große Schwierigkeiten dar.

§ 123. Die Kapteynschen Reihen der zweiten Art.

Die Neumannschen Reihen der zweiten Art veranlassen uns ganz natürlich dazu, eine Reihe von folgender Form zu untersuchen:

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\frac{\nu+n}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right) J^{\frac{\varrho+n}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right);$$

für eine solche Reihe schlagen wir die Bezeichnung *Kapteynsche Reihe der zweiten Art* vor.

Um die Existenz einer solchen Entwicklung nachzuweisen, haben wir die Methode der §§ 120, 121 auf die vorläufig rein hypothetische Entwicklung:

$$(2)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho} = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n}\big((\nu+\varrho+2n)x\big) J^{\varrho+n}\big((\nu+\varrho+2n)x\big)$$

1) Annales de l'École Normale (3) Bd. 19, p. 429; 1902.

2) Graf und Gubler: Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen Heft I, p. 96—107.

anzuwenden; wir erhalten so für die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten folgendes Gleichungssystem:

$$(3) \qquad 1 = \frac{(\nu + \varrho)^{\nu+\varrho}}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\varrho)} \cdot \alpha_0$$

und allgemeiner:

$$(4) \quad 0 = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\nu+\varrho+2n}{p} (\nu+\varrho+2n+2p)^{\nu+\varrho+2n} \cdot \alpha_{n-p}.$$

Für die ersten Koeffizienten α_n finden wir sonach Ausdrücke, welche mittelst unvollständiger Induktion dazu führen:

$$(5) \qquad \alpha_n = \frac{(\nu+\varrho)\,\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\varrho)}{n!\,\Gamma(\nu+\varrho)} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\varrho+n)}{(\nu+\varrho+2n)^{\nu+\varrho+1}}$$

anzunehmen. Um nun die vollständige Induktion durchführen zu können, müssen wir erst die Identität:

$$(6) \quad \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\nu+\varrho+n-p-1}{n-p} \binom{\nu+\varrho+2n}{p} (\nu+\varrho+2n-2p)^{2n-1} = 0$$

beweisen; drücken wir indessen die in dieser Gleichung vorkommenden Binomialkoeffizienten durch Gammafunktionen aus, so erhellt, daß (6) nichts andres ist als § 120, (5), so daß der Ausdruck (5) wirklich richtig ist; somit haben wir hier eine Analogie zwischen den Neumannschen und den Kapteynschen Reihen gefunden.

Wenden wir nun weiter die Methode des § 121 an, so erhalten wir folgenden Hilfssatz:

Vorausgesetzt, daß keine der drei Größen ν, ϱ und $\nu + \varrho$ eine ganze negative Zahl ist, erhält man eindeutig folgende Entwicklung in eine Kapteynsche Reihe zweiter Art:

$$(7) \begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho} = (\nu+\varrho)\,\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\varrho) \cdot \\ \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\binom{\nu+\varrho+n-1}{n}}{(\nu+\varrho+2n)^{\nu+\varrho+1}} \cdot J^{\nu+n}\big((\nu+\varrho+2n)x\big)\, J^{\varrho+n}\big((\nu+\varrho+2n)x\big), \end{cases}$$

welche jedenfalls unbedingt konvergiert, wenn $|x| < \frac{1}{2}\Omega(1)$ ist. Für $\nu + \varrho = 0$ reduziert sich die Formel (7) auf die Identität $1 = 1$.

Bedienen wir uns abermals der Methode der §§ 108, 121, so führt (7) unmittelbar zu folgenden zwei anderen Formeln:

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{J^{n+\nu}(2nx)\,J^{n-\nu}(2nx)}{(2n)^{2p}} = \sum_{r=1}^{r=p} \frac{(2r)!\,\mathfrak{B}_{2r}^{2p}}{\Gamma(r+1+\nu)\,\Gamma(r+1-\nu)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r},$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{J^{n+\nu}((2n+1)x)\,J^{n+1-\nu}((2n+1)x)}{(2n+1)^{2p}} = \\ &\qquad = \sum_{r=0}^{r=p-1} \frac{(2r+1)!\,\mathfrak{B}_{2r+1}^{2p}}{\Gamma(r+1+\nu)\,\Gamma(r+2-\nu)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}, \end{aligned}\right.$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{B}$ die durch § 121, (7) definierten Zahlen bedeuten.

Die Formeln (8), (9) sind zu § 116, (5), (6) ganz analog; denkt man sich noch $\nu = q$, wo $q > p$ eine ganze Zahl bedeutet, so haben die beiden Reihen linker Hand in (8), (9) die Summe Null; diese Nullentwicklungen können also auch nur *formale* Identitäten sein.

Um eine Potenzreihe in eine Kapteynsche Reihe zu entwickeln, setzen wir in (7) $\nu : 2$ und $\varrho : 2$ für ν und ϱ; eine Anwendung der Methode des vorigen Paragraphen ergibt dann unschwer den allgemeinen Satz:

VIII. *Wenn keine der Größen ν, ϱ und $\nu + \varrho$ eine ganze, negative und gerade Zahl ist, läßt sich die Potenzreihe:*

$$(10)\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

mit dem Konvergenzradius ϱ eindeutig folgendermaßen in eine Kapteynsche Reihe der zweiten Art entwickeln:

$$(11)\quad F(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\frac{\nu+s}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s\right)x\right) J^{\frac{\varrho+s}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s\right)x\right),$$

wo sich die Koeffizienten a_s aus folgender Formel bestimmen lassen:

$$(12)\quad a_s = \sum_{p=0}^{\leq\frac{s}{2}} \frac{\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s-2p\right)\Gamma\left(\frac{\nu+s-2p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+s-2p+2}{2}\right)}{\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+s\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}+s-p+1}} \binom{\frac{\nu+\varrho}{2}+s-p-1}{p} b_{s-2p}.$$

Die so erhaltene Cylinderfunktionenreihe ist jedenfalls unbedingt konvergent, wenn $|x| < \frac{1}{2}\Omega(1)$ und zugleich $|x| < \frac{1}{2}\Omega(\varrho)$ vorausgesetzt wird. In dem Spezialfalle $\nu + \varrho = 0$ reduziert sich das erste Glied rechter Hand in (11) *auf b_0.*

Unsere Kenntnis des Konvergenzbereiches der Kapteynschen Reihen zweiter Art zeigt natürlich dieselben Lücken, auf welche wir in § 122 für die Reihen der ersten Art aufmerksam gemacht haben.

Kapitel XXIII.

Analogien zwischen den Neumannschen und den Kapteynschen Reihen.

§ 124. Entwicklungen ein und derselben Funktion $f(\alpha x)$.

Die Entwicklungen ein und derselben Potenzreihe in eine Neumannsche oder in eine Kapteynsche Reihe zeigen sehr innige Verwandtschaften; um diese näher nachzuweisen, betrachten wir zuerst die Reihen der ersten Art; wir finden für die Potenzreihe:

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

folgende Entwicklungen, in denen α eine willkürliche endliche Konstante bedeutet:

$$(2)\qquad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n)\, A^{\nu,n}(\alpha) J^{\nu+n}(x),$$

$$(3)\qquad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}^{\nu,n}\left(\frac{\alpha}{\nu+n}\right)}{(\nu+n)^{\nu+1}} J^{\nu+n}\big((\nu+n)\,x\big)$$

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$(4)\qquad A^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-p)}{p!} \cdot a_{n-2p} \cdot \alpha^{n-2p},$$

$$(5)\qquad \mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2p)^2\, \Gamma(\nu+n-p)}{p!} \cdot a_{n-2p} \cdot \alpha^{n-2p}.$$

Für die Reihen der zweiten Art erhalten wir auf ähnliche Weise:

$$(6)\quad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\nu+\varrho}{2} + n\right) B^{\nu,\varrho,n}(\alpha)\, J^{\frac{\nu+n}{2}}(x)\, J^{\frac{\varrho+n}{2}}(x),$$

$$(7)\quad \begin{cases} f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}} \cdot \\ \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{B}^{\nu,\varrho,n}\left(\frac{2\alpha}{\nu+\varrho+2n}\right)}{\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}+1}} J^{\frac{\nu+n}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right) J^{\frac{\varrho+n}{2}}\left(\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right) \end{cases}$$

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$(8)\quad \begin{cases} B^{\nu,\varrho,n}(\alpha) = \sum\limits_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2} - s + 1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2} - s + 1\right)}{\frac{\nu+\varrho}{2} + n - 2s} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \dbinom{\frac{\nu+\varrho}{2} + n - s - 1}{s} a_{n-2s} \cdot \alpha^{n-2s}, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}^{\nu,\varrho,n}(\alpha) = \sum\limits_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \left(\frac{\nu+\varrho}{2} + n - 2s\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2} - s + 1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2} - s + 1\right) \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \dbinom{\frac{\nu+\varrho}{2} + n - s - 1}{s} a_{n-2s} \cdot \alpha^{n-2s}. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit Y eine der Funktionen A oder B, während $\mathfrak{Y}$ das entsprechende $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ bedeuten mag, so findet man leicht folgende Differentialgleichung:

$$(10)\qquad \alpha^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} + (2\omega + 1)\,\alpha \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \omega^2 Y = \mathfrak{Y},$$

wo ω gleich ν oder gleich $(\nu + \varrho) : 2$ zu setzen ist, je nachdem die zugehörigen Reihen von der ersten oder der zweiten Art sind. Dieses Resultat läßt sich auch, wie folgt, als Satz aussprechen:

Wenn die Kapteynsche Reihe (3) *oder* (7) *gegeben ist, so erhält man für die Funktion:*

$$(11)\qquad \alpha^2 \frac{\partial^2 f(\alpha x)}{\partial \alpha^2} + (2\omega + 1)\,\alpha \frac{\partial f(\alpha x)}{\partial \alpha} + \omega^2 f(\alpha x)$$

Neumannsche Reihen mit denselben Entwicklungskoeffizienten $\mathfrak{A}^{\nu,n}(\alpha)$ *und* $\mathfrak{B}^{\nu,\varrho,n}(\alpha)$ *wie die gegebene Kapteynsche Reihe von derselben Art.*

Dieses allgemeine Ergebnis läßt sich mit Vorteil auf denjenigen spezielleren Fall anwenden, in welchem $f(x)$ ein gewisses partikuläres Integral von der in den §§ 31, 115 untersuchten linearen, nicht homogenen Differentialgleichung:

$$(12)\qquad y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = \frac{1}{x^2} g^{\varrho}(x)$$

ist, in der man für hinreichend kleine Werte von $|x|$ folgende Entwicklung hat:

$$(13)\qquad g^{\varrho}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+n}.$$

Gehen wir nun von der für $f(x)$ erhaltenen Kapteynschen Reihe der ersten Art aus:

$$(14)\qquad f(\alpha x) = \alpha^{\varrho} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{A}^{\varrho, n}\left(\frac{\alpha}{\varrho + n}\right)}{(\varrho + n)^{\varrho + 1}} J^{\varrho + n}\left((\varrho + n)x\right),$$

so ergibt eine Kombination der Gleichungen (10) und § 115, (13) für den Koeffizienten $\mathfrak{A}$ den bemerkenswerten Ausdruck:

$$(15)\qquad \mathfrak{A}^{\varrho, n}(\alpha) = \frac{b^{\varrho, n}(\alpha) + (\nu^2 - (n + 2\varrho)n\alpha^2) B^{\varrho, n}(\alpha)}{1 - \alpha^2},$$

aus welchem man für $\alpha = \frac{1}{\varrho + n}$ unmittelbar die Entwicklung von $f(x)$ herleiten kann, wenn nur $\varrho + n$ nicht gleich 1 wird; für $\alpha = 1$ wird nämlich der Ausdruck linker Hand in (15) unbestimmt, und sucht man dessen Wert, so findet man genau den aus (10) erhaltenen Ausdruck. Im allgemeinen können wir also behaupten:

Die Kapteynsche Reihe erster Art für die Funktion $f(\alpha x)$ läßt sich bilden, ohne andere Koeffizienten zu Hilfe zu nehmen als diejenigen, welche schon in den Neumannschen Reihen erster Art für $g^{\varrho}(\alpha x)$ und $f(\alpha x)$ vorkommen.

In dem Spezialfalle $\varrho = 0$, $\alpha = \nu$ folgt aus (15) die Kapteynsche Reihe:

$$(16)\qquad f(\nu x) = -\frac{a_0}{\nu^2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s}{s^2 - \nu^2} \cdot b^s\left(\frac{\nu}{s}\right) \cdot J^s(sx),$$

welche sehr merkwürdig ist, wenn man beachtet, daß sich aus § 115, (14) folgende Neumannsche Reihe ergibt:

$$(17)\qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b^s(1)}{s^2 - \nu^2} J^s(x).$$

Auf diese Weise findet man zum Beispiel folgende bemerkenswerten Kapteynschen Reihen:

$$(18)\qquad \Pi^{\nu}(\nu x) = \frac{\sin \nu\pi}{\nu\pi} - \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{J^{2s}(2sx)}{4s^2 - \nu^2},$$

$$(19)\qquad \mathrm{X}^{\nu}(\nu x) = 2\nu \sin \nu\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{J^{2s+1}\left((2s+1)x\right)}{(2s+1)^2 - \nu^2},$$

die beide anwendbar sind, falls nur $|x| < \Omega(1)$ vorausgesetzt wird, während ν eine endliche Größe bedeutet. Aus diesen beiden Formeln ergibt sich weiter:

$$(20) \qquad \Psi^{\nu}(\nu x) = \frac{\sin \nu\pi}{\nu\pi}\left(1 - 2\nu^2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s^2 - \nu^2} \cdot J^s(sx)\right),$$

$$(21) \qquad \Omega^{\nu}(\nu x) = -\frac{2\sin^2\frac{\nu\pi}{2}}{\nu\pi} + \frac{4\nu}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\sin^2\frac{(\nu+s)\pi}{2}}{s^2 - \nu^2} \cdot J^s(sx),$$

so daß (21) für $\nu = 1$ folgende § 22, (20) sehr ähnliche Entwicklung liefert:

$$(22) \qquad \pi\Omega^1(x) = -2 + 4 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{4s^2 - 1} \cdot J^{2s}(2sx).$$

Durch Entwicklungen der einzelnen Koeffizienten rechter Hand in (18), (19) nach steigenden Potenzen von ν gewinnen wir die eigentümlichen Formeln:

$$(23) \qquad \Pi^{\nu}(\nu x) = \frac{\sin \nu\pi}{\nu\pi}\left(1 - 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} f_{2s}(x) \cdot \nu^{2s}\right), \quad |\nu| < 2,$$

$$(24) \qquad \mathrm{X}^{\nu}(\nu x) = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} g_{2s}(x) \cdot \nu^{2s-1}, \quad |\nu| < 1,$$

wo $f_{2s}(x)$ und $g_{2s}(x)$ genau die durch die Formel § 121, (6) definierten ganzen Polynome von x bedeuten.

Wenden wir weiter die Formeln (6), (7) des § 21 an, so erhalten wir aus (18), (19) unter Anwendung von § 21, (1) folgende neuen Formeln:

$$(25) \quad J^{\frac{\nu}{2}}(\nu x) J^{-\frac{\nu}{2}}(\nu x) = \frac{2 \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\nu\pi}\left(1 - 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\nu^2}{4s^2 - \nu^2}\left(J^s(2sx)\right)^2\right),$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} J^{\frac{1+\nu}{2}}(\nu x) J^{\frac{1-\nu}{2}}(\nu x) = \\ = \dfrac{4 \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\pi} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\nu}{(2s+1)^2 - \nu^2} J^s\big((2s+1)x\big) J^{s+1}\big((2s+1)x\big), \end{array} \right.$$

wo wir demnach $|x| < \frac{1}{2}\Omega(1)$ annehmen müssen; für $\nu = 1$ führt (25) zu der bemerkenswerten Entwicklung:

$$(27)\qquad \frac{\sin x}{x} = 1 - 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{4s^2-1}\left(J^s(sx)\right)^2, \quad |x| < \Omega(1);$$

ferner erhalten wir folgende (23), (24) ähnlichen Entwicklungen:

$$(28)\qquad J^{\frac{\nu}{2}}(\nu x)\,J^{-\frac{\nu}{2}}(\nu x) = \frac{2\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\nu\pi}\left(1 - 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty} q_{2s}(x)\cdot\nu^{2s}\right), \quad |\nu| < 2,$$

$$(29)\qquad J^{\frac{1+\nu}{2}}(\nu x)\,J^{\frac{1-\nu}{2}}(\nu x) = \frac{4\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\pi}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} q_{2s+1}(x)\cdot\nu^{2s+1}, \quad |\nu| < 1,$$

wo die Funktionen q genau die durch die Formeln § 123, (8), (9) definierten ganzen Polynome von x bedeuten. Aus (28) gewinnen wir endlich die eigentümliche Entwicklung:

$$(30)\qquad J^x\left(\frac{x}{2}\right)J^{-x}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}\left(1 - 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty} q_{2s}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot(2x)^{2s}\right), \quad |x| < 1.$$

Die Potenzreihen in (23), (24) und (28), (29), (30) sind denjenigen sehr ähnlich, welche Meissel[1]) für die Funktion $\nu^{-\nu}\cdot J^\nu(\nu x)$ aufzustellen versucht hat.

§ 125. Kapteynsche Reihen für die Funktion $\frac{1}{y-x}$.

Um die Analogie zwischen den Neumannschen und den Kapteynschen Reihen noch weiterzuführen, setzen wir:

$$(1)\qquad \frac{1}{y-x} = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varepsilon_n}{(\nu+n)^\nu}V^{\nu,n}\big((\nu+n)y\big)\,J^{\nu+n}\big((\nu+n)x\big),$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{y-x} = \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}}\cdot\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\varepsilon_n}{\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n\right)^{\frac{\nu+\varrho}{2}}}\cdot \\ \cdot\,\mathfrak{B}^{\nu,\varrho,n}\left(\left(\dfrac{\nu+\varrho}{2}+n\right)y\right)J^{\frac{\nu+n}{2}}\left(\left(\dfrac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right)J^{\frac{\varrho+n}{2}}\left(\left(\dfrac{\nu+\varrho}{2}+n\right)x\right), \end{cases}$$

1) Jahresbericht über die Ober-Realschule Kiel 1892.

wo wie gewöhnlich $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ für $n > 0$ anzunehmen ist, und wo wir der Kürze halber für $n \geqq 1$:

$$(3)\qquad V^{\nu,n}(y) = \frac{1}{4}\cdot\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(\nu+n-2s)^2\,\Gamma(\nu+n-s)}{s!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s+1},$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{V}^{\nu,\varrho,n}(y) = \\ = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+n-2s\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+n}{2}-2s\right)\cdot \\ \cdot\binom{\frac{\nu+\varrho}{2}+n-s-1}{s}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2s+1} \end{cases}$$

gesetzt haben; für $n = 0$ sind diese Ausdrücke dagegen mit 2 zu multiplizieren.

Eine Vergleichung der Formeln (3), (4) mit § 109, (11), bez. § 117, (10) für $O^{\nu,n}(y)$ und $\mathfrak{U}^{\nu,\varrho,n}(y)$ ergibt unmittelbar folgende Differentialgleichung:

$$(5)\qquad N^{(2)} + \frac{3-2\omega}{y}N^{(1)} + \frac{(\omega-1)^2}{y^2}N = \frac{\omega+n}{y^2}K,$$

wo N die Neumannschen Funktionen O oder $\mathfrak{U}$ und K die zugehörigen Kapteynschen V oder $\mathfrak{V}$ bedeuten, während $\omega = \nu$ oder $= (\nu+\varrho):2$ anzunehmen ist; die Gleichung (5) kann natürlich auch sehr leicht mittelst § 124, (10) hergeleitet werden.

Wendet man ferner die aus § 112, (15) erhaltene Differentialgleichung für $O^{\nu,n}(y)$ an, so ergibt sich aus (5) für die Funktion V der Ausdruck:

$$(6)\qquad V^{\nu,n}(y) = \frac{(\nu-n)^2-y^2}{\nu+n}\cdot O^{\nu,n}(y) + \frac{y}{n}\cdot\cos^2\frac{n\pi}{2} + \sin^2\frac{n\pi}{2}$$

und für $\nu = 0$ folgende Formel von Kapteyn[1]):

$$(7)\qquad V^n(ny) = n(1-y^2)\,O^n(ny) + y\cos^2\frac{n\pi}{2} + \sin^2\frac{n\pi}{2};$$

setzt man weiterhin $y = 1$, so erhält man hieraus mittelst (1) schließlich die in § 23, Formel (6) gegebene Entwicklung.

Was die Funktion:

$$\mathfrak{V}^{\nu,n}(y) = \mathfrak{V}^{\nu,\nu,n}(y)$$

1) Annales de l'École Normale (3) Bd. 10, p. 117; 1893.

angeht, so zeigt (5), daß sie einer Gleichung dritter Ordnung genügen muß, die zu § 117, (11) analog ist.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen haben wir noch die Formel § 124, (11) auf ein Beispiel anzuwenden. In der Tat ergibt sich aus (1) ohne Mühe die entsprechende Neumannsche Reihe:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\nu^2}{y-x} + \dfrac{(2\nu+1)x}{(y-x)^2} + \dfrac{2x^2}{(y-x)^3} = \\ \quad = \left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n (\nu+n)^{\nu+1} V^{\nu,n}(y) J^{\nu+n}(x), \quad |x| < |y|, \end{cases}$$

welche für $\nu = 0$ recht elegant wird; die erlaubte Annahme $y = 2x$ führt zu folgender andren Formel:

$$(9)\qquad \frac{(\nu+1)^2+2x}{x} = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n (\nu+n)^{\nu+1} V^{\nu,n}(2x) J^{\nu+n}(x).$$

Eine Anwendung von § 124, (3), (5) liefert ebenso leicht die zu (8) analoge Formel:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{1}{(\nu+n)^2} \cdot \dfrac{x^n}{y^{n+1}} = \\ \quad = \left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum\limits_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot O^{\nu,n}\Big((\nu+n)y\Big) J^{\nu+n}\Big((\nu+n)x\Big); \end{cases}$$

in dem speziellen Falle $\nu = 0$ werden die beiden Seiten von (10) unendlich; durch eine Subtraktion von $1:(\nu^2 y)$ gelangen wir indessen unmittelbar zu folgender andern Formel:

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{x^n}{y^{n+1}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{O^n(ny)}{n} \cdot J^n(nx) - \frac{x^2}{2y};$$

für $y = 1$ ist die Reihe linker Hand in (11) die bekannte Funktion, an welcher Legendre[1]), Abel[2]), Schaeffers[3]) und Kapteyn[4]) interessante Eigenschaften aufgezeigt haben. Setzt man ferner in

---

1) Exercices de Calcul intégral, Bd. I, p. 244.

2) Oeuvres complètes, Bd. II, p. 189.

3) Journal für Mathematik, Bd. 30.

4) Nieuw Archief (2) Bd. 3, p. 225—229; 1897.

(10) $y = 2x$, was ja erlaubt ist, so findet man die zu (9) analoge Formel:

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(\nu+n)^2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot \\ \qquad \cdot O^{\nu,n}\big((2\nu+2n)x\big) J^{\nu+n}\big((\nu+n)x\big), \end{cases}$$

während sich durch dieselbe Annahme aus (11) ergibt:

$$(13)\qquad \frac{1}{4x}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{O^n(2nx)}{n} J^n(nx) - \frac{x}{8},$$

denn die entsprechende numerische Reihe linker Hand läßt sich mittelst einer Formel von Legendre[1]) summieren.

Es ist offenbar, daß man ähnliche Reihen der zweiten Art herleiten kann; da die Entwicklung indessen zu der oben gegebenen durchaus analog ist, gehen wir hier nicht näher auf diese Frage ein.

§ 126. **Neue Herleitung einiger Reihen der zweiten Art.**

Die im Anhange gegebene Integralidentität (I_1):

$$(1)\quad D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin 2\omega \cos\varphi)\, x \sin 2\omega \cos(\nu\varphi)\, (\operatorname{tg}\omega)^{\nu}\, d\omega\, d\varphi = \frac{\pi}{2} f(x)$$

gestattet uns, unter Anwendung des Integralausdruckes für

$$J^{\frac{n+\nu}{2}}(x)\, J^{\frac{n-\nu}{2}}(x)$$

in § 21, (1) aus den entsprechenden Reihen der ersten Art für $\nu = 0$ unmittelbar diejenigen Neumannschen und Kapteynschen Reihen der zweiten Art herzuleiten, für welche $\varrho = -\nu$ ist, und umgekehrt, so daß diese Reihen der ersten und zweiten Art in der Tat als identisch anzusehen sind.

Zu diesem Zwecke setzen wir in den Reihen:

$$(2)\qquad f(\alpha x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A^n(\alpha) J^n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{A}^n(\alpha)\, J^n(nx)$$

---

1) loc. cit.

$2x \cos\varphi$ für x und $\frac{\alpha}{2} \sin 2\omega$ für α, so daß die obenerwähnten Formeln unmittelbar folgende Reihen der zweiten Art:

$$
(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(\alpha x) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} B^{\nu,n}(\alpha) J^{\frac{n+\nu}{2}}(x) J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{B}^{\nu,n}(\alpha) J^{\frac{n+\nu}{2}}(nx) J^{\frac{n-\nu}{2}}(nx) \end{aligned} \right.
$$

ergeben; für die neuen Koeffizienten erhalten wir:

$$
(4) \qquad B^{\nu,n}(\alpha) = D_\alpha \left(\frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A^n\left(\frac{\alpha}{2} \sin 2\omega\right) (\operatorname{tg} \omega)^\nu \sin 2\omega \, d\omega \right)
$$

und einen ganz analogen Ausdruck für $\mathfrak{B}^{\nu,n}(\alpha)$.

Gehen wir umgekehrt von den Entwicklungen (3) aus und setzen wir dort $2\alpha \cos\varphi$ für α und $\frac{x}{2} \sin 2\omega$ für x, so finden wir die Entwicklungen (2) wieder, so daß wir umgekehrt die Formel:

$$
(5) \qquad A^n(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} B^{\nu,n}(2\alpha \cos\varphi) \cos(\nu\varphi) \, d\varphi
$$

und aus $\mathfrak{B}^{\nu,n}(\alpha)$ die analoge für $\mathfrak{A}^n(\alpha)$ gewinnen.

Setzen wir weiter der Kürze halber:

$$
\mathfrak{U}^{\nu,-\nu,n}(y) = \mathfrak{R}^{\nu,n}(y), \quad \mathfrak{B}^{\nu,-\nu,n}(y) = \mathfrak{K}^{\nu,n}(y),
$$

so ergeben sich aus den Entwicklungen für $1:(y-x)$ folgende Identitäten:

$$
(6) \qquad \mathfrak{R}^{\nu,n}(y) = -2y D_y \int_0^{\frac{\pi}{2}} O^n\left(\frac{2y}{\sin 2\omega}\right) (\operatorname{tg} \omega)^\nu \, d\omega,
$$

$$
(7) \qquad O^n(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{R}^{\nu,n}\left(\frac{y}{2\cos\varphi}\right) \frac{\cos(\nu\varphi)}{\cos\varphi} \, d\varphi
$$

und zwei analoge, welche die Funktionen $\mathfrak{K}^{\nu,n}(y)$ und $V^n(y)$ enthalten.

Kapteyn[1] hat die Formel (6) für $\nu = 0$ angegeben; bemerken wir noch, daß Neumann[2] durch Anwendung von § 21, (1) eine einzelne, ganze und nicht negative Potenz von x in eine Reihe der zweiten Art der Cylinderfunktionen mit ganzem Parameter entwickelt hat, so läßt sich unsere hier dargestellte Methode als eine Kombination der Formeln von Neumann und Kapteyn ansehen.

Um einige Anwendungen der oben gewonnenen Integralformeln zu geben, gehen wir zunächst von den Neumannschen und Kapteynschen Reihen der ersten Art für $1:(y-x)$ aus und finden dann mittelst § 21, (1) und (Γ_{20}) folgende Entwicklungen:

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n O^n(y) J^{\frac{n+\nu}{2}}(x) J^{\frac{n-\nu}{2}}(x) = \\ & \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)} \cdot \frac{(2x)^n}{y^{n+1}}, \end{aligned} \right.$$

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\pi\nu y} + \sum_{n=1}^{n=\infty} V^n(ny) J^{\frac{n+\nu}{2}}(nx) J^{\frac{n-\nu}{2}}(nx) = \\ & \qquad = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)} \cdot \frac{(2x)^n}{y^{n+1}}. \end{aligned} \right.$$

Setzt man ferner in (8) $\nu = 0$, $\nu = -1$, so gewinnt man, nachdem man $-x$ für x gesetzt, durch Addition und Subtraktion die eleganten Formeln:

$$(10)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} O^{2n}(y) \left(J^n(x)\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{y^2-4x^2}},$$

$$(11)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} O^{2n-1}(y) J^n(x) J^{n-1}(x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-4x^2}} - 1\right),$$

während sich aus (9) mittelst § 125, (6) in ähnlicher Weise ergibt:

---

1) Annales de l'Ecole Normale (3) Bd. 10, p. 111; 1893.

2) Theorie der Besselschen Funktionen, p. 70; 1867.

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\nu\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} J^{\frac{n+\nu}{2}}(nx)\, J^{\frac{n-\nu}{2}}(nx) = \\ \qquad = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)} (2x)^n, \end{cases}$$

woraus für $\nu = 0$, $\nu = -1$ die (10), (11) ähnlichen spezielleren Formeln:

$$(13)\qquad 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(J^n(2nx)\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}},$$

$$(14)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} J^n((2n+1)x)\, J^{n+1}((2n+1)x) = \frac{1}{4x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} - 1\right)$$

folgen, die auch zu § 23, (6) große Analogie besitzen.

Die Entwicklungen (10), (11) ermöglichen uns, das elliptische Integral erster Art in eine Neumannsche Reihe der zweiten Art zu entwickeln. Zu dem Ende setzen wir $y = 2 : \sin\varphi$ und integrieren von 0 bis φ; alsdann finden wir, nachdem wir noch k statt x gesetzt haben:

$$(15)\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} (J^n(k))^2 \cdot \int_0^\varphi O^{2n}\left(\frac{2}{\sin\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sin\varphi},$$

$$(16)\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \varphi + 4k \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} J^n(k) J^{n+1}(k) \cdot \int_0^\varphi O^{2n+1}\left(\frac{2}{\sin\varphi}\right) d\varphi;$$

die analogen Kapteynschen Reihen, welche wir in ähnlicher Weise aus (12) herleiten können, sind etwas komplizierter.

Gehen wir jetzt von der Formel (6) aus, so gewinnen wir, mittelst der Neumannschen Reihe erster Art für die Funktion $1 : (y - x)$, folgende andere Entwicklungen:

$$(17)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_{2n} \mathfrak{R}^{\nu, 2n}(y) J^{2n}(x) = \frac{\pi\nu}{y\sin\nu\pi} \cdot F\left(1+\nu, 1-\nu, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4y^2}\right),$$

$$(18)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{N}^{\nu,2n+1}(y)\, J^{2n+1}(x) = \frac{\pi\nu(1-\nu)x}{4y^2 \sin\nu\pi} \cdot F\left(1+\nu, 2-\nu, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4y^2}\right),$$

wo F die gewöhnliche hypergeometrische Reihe bedeutet; diese Formeln sind als die umgekehrten zu (10), (11) anzusehen.

Offenbar erhält man für dieselben hypergeometrischen Reihen zwei (17), (18) ganz ähnliche Kapteynsche Reihen der ersten Art.

VIERTER TEIL.

DARSTELLUNGEN WILLKÜRLICHER FUNKTIONEN DURCH CYLINDERFUNKTIONEN.

Kapitel XXIV.

Allgemeine Funktionentypen mit einem Invariabilitätsbereiche.

§ 127. Verallgemeinerungen der Kreis- und Cylinderfunktionen.

Es ist bisher noch nicht gelungen, eine trigonometrische Reihe von der Form:

$$(1) \qquad a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)$$

zu finden, welche in einem Intervalle von der Größe 2π dieselbe Konstante darstellte, in welcher aber die Koeffizienten a_n und b_n für $n > 1$ nicht sämtlich Null sein dürften. Vielleicht hängt dies damit zusammen, daß die Reihe:

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2} - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \cos 4x - \cdots,$$

welche analog zu den Fourierschen Reihen für die Bernoullischen Funktionen die Null darstellen sollte, zwischen endlichen Grenzen oscilliert, wenn x nicht ein ungerades Multiplum von π bedeutet; denn in diesem Falle ist die obenerwähnte Reihe sicher divergent. Die Frage nach der Existenz einer solchen Konstantenentwicklung und also auch nach der Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe ist noch eine offene; man weiß nur, daß eine solche Entwicklung nicht eine gleichmäßig konvergente oder bloß eine gliedweise integrable Reihe sein kann.

Es ist indessen sehr leicht, allgemeinere Entwicklungsfunktionen zu bilden, für welche die (2) entsprechende Reihe konvergiert, so daß man durch solche Funktionen Konstantenentwicklungen erhalten kann. Da diese Frage für die Schlömilchschen Reihen von der größten Bedeutung ist, wollen wir hier den Fall betrachten, in welchem die Entwicklungsfunktionen sehr weitgehende Generalisationen der Cylinderfunktionen und der damit verwandten Funktionen sind.

Wir betrachten daher eine Funktion $f(\omega, x)$ der zwei unabhängigen reellen Variabeln ω und x, von welchen die erste das endliche Intervall $a \leqq \omega \leqq b$ kontinuierlich durchlaufen soll; ein solches Intervall bezeichnen wir immer der Kürze halber mit (a, b), wobei die Endwerte a und b immer als mitinbegriffen anzusehen sind. Was die Variable x betrifft, so darf sie folgende Werte annehmen:

(3) $$x = x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots;$$

die Zahlen (3) können in endlicher oder unendlicher Anzahl vorkommen; sie können, um die beiden Extreme zu nennen, diskret liegen oder ein Intervall kontinuierlich ausfüllen; darüber machen wir gar keine Voraussetzungen. Weiter soll die Funktion $f(\omega, x)$ noch folgenden zwei Bedingungen genügen:

1) $f(\omega, x)$ soll für die oben angegebenen Werte von ω und x immer endlich, überdies aber in ω kontinuierlich und differentiierbar sein. Wir setzen für $x = x_r$ demnach:

(4) $$\alpha_r \leqq f(\omega, x_r) \leqq \beta_r, \quad a \leqq \omega \leqq b,$$

wo also α_r und β_r endliche Größen bedeuten.

2) Die Gleichung:

(5) $$f(\omega, x_r) = \xi, \quad \alpha_r \leqq \xi \leqq \beta_r$$

soll, nach ω aufgelöst, einen und nur einen in dem Intervalle (a, b) sich befindenden reellen Wert:

(6) $$\omega = g(x_r, \xi)$$

liefern.

Diese zweite Voraussetzung reicht hin, um zu beweisen, daß $f(\omega, x_r)$, wenn ω das Intervall (a, b) durchläuft, entweder immer wachsen oder immer abnehmen muß; wäre nämlich:

(7) $$f(\omega, x) = f(\omega', x), \quad \omega \neq \omega',$$

so könnte die Gleichung (6) ω in dem Intervalle (a, b) nicht als *eindeutige* Funktion von ξ bestimmen. Weiter sieht man ein, daß die nach ω genommene partielle Ableitung von $f(\omega, x)$ im obenerwähnten Intervalle (a, b) niemals verschwinden kann; denn dann würde ja die Gleichung (5) für $|\omega - \omega'|$ beliebig klein möglich sein.

Nach diesen Überlegungen betrachten wir eine Funktion:

(8) $$\Phi(\omega) = \Phi_1(\omega) + i\Phi_2(\omega),$$

wo $\Phi_1(\omega)$ und $\Phi_2(\omega)$ reelle Funktionen von ω bedeuten; wird nun $\Phi(\omega)$ im Intervalle (a, b) als integrabel vorausgesetzt, so definieren die folgenden zwei bestimmten Integrale:

$$(9)\quad \begin{cases} F(\alpha, x) = \int\limits_a^b \cos\left(\alpha f(\omega, x)\right) \Phi(\omega)\, d\omega, \\ \mathfrak{F}(\alpha, x) = \int\limits_a^b \sin\left(\alpha f(\omega, x)\right) \Phi(\omega)\, d\omega \end{cases}$$

ganze transcendente Funktionen von α. Um das einzusehen, hat man in der Tat nur für *cos* und *sin* die gewöhnlichen Potenzreihen einzusetzen und dann gliedweise zu integrieren, was ja offenbar erlaubt ist, da a und b endliche Größen bedeuten. Auf diese Weise finden wir die Potenzreihen:

$$(10)\quad F(\alpha, x) = a_0 - a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4 - \cdots + (-1)^n a_{2n}\alpha^{2n} + \cdots = \Sigma u_{2n},$$

$$(11)\quad \mathfrak{F}(\alpha, x) = a_1\alpha - a_3\alpha^3 + a_5\alpha^5 - \cdots + (-1)^n a_{2n+1}\alpha^{2n+1} + \cdots = \Sigma u_{2n+1},$$

wo wir der Kürze halber:

$$(12)\quad a_n = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b \left(f(\omega, x)\right)^n \Phi(\omega)\, d\omega$$

gesetzt haben.

Es ist nun nachzuweisen, daß uns die Funktionen $F(\alpha, x)$ und $\mathfrak{F}(\alpha, x)$ ein einfaches Mittel bieten, um bemerkenswerte Reihenentwicklungen zu bilden. Erstens betrachten wir den spezielleren Fall, in welchem immer $\beta_r \leqq \pi$ und $\alpha_r \geqq -\pi$ ist; dann geben die Fourierschen Reihen für die Bernoullischen Funktionen (T_7) und (T_8) folgende Formeln:

$$(13)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n}} \cdot F(s\alpha, x) = \sum_{s=0}^{s=n} \sigma_{2n-2s} \cdot u_{2s},$$

$$(14)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n+1}} \cdot \mathfrak{F}(s\alpha, x) = \sum_{s=0}^{s=n} \sigma_{2n-2s} \cdot u_{2s+1},$$

wo σ_r die in $E, (\beta)$ definierte numerische Reihe bedeutet; die Formeln (13), (14) sind sonach als bemerkenswerte Verallgemeinerungen der Formeln (T_9) anzusehen.

Wir betrachten weiter die Reihen (T_5) und (T_6) für $\cos(\alpha x)$ und $\sin(\alpha x)$ und finden:

$$(15)\quad F(\alpha, x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot F_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \left(\frac{1}{\alpha+s} + \frac{1}{\alpha-s}\right) F(s, x)\right),$$

$$(16)\quad \mathfrak{F}(\alpha, x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1) \left(\frac{1}{\alpha-s} - \frac{1}{\alpha+s}\right) \mathfrak{F}(s, x),$$

wo α eine willkürliche endliche Größe bedeutet und F_0 eine Abkürzung für die von x unabhängige Größe $F(0, x)$ ist.

Bezeichnet man ferner mit $\sigma_{2n}(x)$, $\sigma_{2n+1}(x)$ die Reihen linker Hand in (13), (14) für $\alpha = 1$, während $\sigma_0 = \frac{1}{2} F_0$ zu nehmen ist, so erhält man aus (13), (14), falls $|x| < 1$ vorausgesetzt wird, folgende andere Entwicklungen:

$$F(\alpha, x) = \frac{2 \sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left(\sigma_0(x) - \sigma_2(x)\alpha^2 + \sigma_4(x)\alpha^4 - \cdots\right), \tag{17}$$

$$\mathfrak{F}(\alpha, x) = \frac{2 \sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \left(\sigma_1(x)\alpha - \sigma_3(x)\alpha^3 + \sigma_5(x)\alpha^5 - \cdots\right); \tag{18}$$

führt man in diesen Formeln rechter Hand die gewöhnliche Potenzreihe für $\sin(\alpha\pi)$ ein, so ist offenbar, daß sich (17), (18) als einfache Folgerungen aus (13), (14) darbieten.

§ 128. Summation einiger Reihen, welche nach $F(\alpha, x)$ und $\mathfrak{F}(\alpha, x)$ fortschreiten.

Wir kehren jetzt zu dem allgemeinen Falle zurück und wenden folgende elementare Formel:

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} - \cos\omega + \cos 2\omega - \cos 3\omega + \cdots + (-1)^n \cos n\omega = \\ &\qquad = \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right)}{2\cos\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \right.$$

an, aus der wir unmittelbar die andere:

$$\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \varepsilon_s F(s, x) = (-1)^n \cdot \int_a^b \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} f(\omega, x)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2} f(\omega, x)\right)} \cdot \Phi(\omega)\, d\omega \tag{1}$$

finden, wo wie gewöhnlich $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_s = 2$ für $s > 0$ anzunehmen ist. Transformieren wir nun mittelst § 127, (5) das Integral linker Hand in (1) und setzen wir außerdem $\xi = \pi + \eta$, so gewinnen wir für das obenerwähnte Integral den Ausdruck:

$$I = \int_{\alpha_r - \pi}^{\beta_r - \pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\eta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\eta\right)} \cdot \frac{G(x_r, \pi + \eta)}{g_1(x_r, \pi + \eta)}\, d\eta, \tag{2}$$

wo $G(x_r, \xi)$ und $g_1(x_r, \xi)$ diejenigen Ausdrücke bedeuten, welche man aus $\Phi(\omega)$ und $\partial f(\omega, x) : \partial\omega$ erhält, wenn man für ω die Funktion $g(x_r, \xi)$ § 127, (6) einführt.

Wir setzen weiter:

$$G(x_r, \pi + \eta) = G_1(x_r, \pi + \eta) + i G_2(x_r, \pi + \eta),$$

wo $G_1(x_r, \pi + \eta)$ und $G_2(x_r, \pi + \eta)$ reelle Funktionen bedeuten, welche in dem Intervalle $(\alpha_r - \pi, \beta_r - \pi)$ abteilungsweise stetig und kontinuierlich sind; endlich setzen wir voraus, daß die Funktionen:

$$\frac{G_1(x_r, \pi + \eta)}{g_1(x_r, \pi + \eta)}, \quad \frac{G_2(x_r, \pi + \eta)}{g_1(x_r, \pi + \eta)}$$

in dem obenerwähnten Intervalle nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzen. Wir bezeichnen ferner mit:

$$2p\pi, \ (2p + 2)\pi, \ \cdots, \ (2p + 2q)\pi$$

diejenigen Multipla von 2π, welche in demselben Intervalle liegen, so daß also:

(2) $\quad (2p-2)\pi < \alpha_r - \pi \leq 2p\pi, \quad (2p+2q)\pi \leq \beta_r - \pi < (2p+2q+2)\pi$

sein muß, und zerlegen unser Intervall $(\alpha_r - \pi, b_r - \pi)$ in verschiedene andere, welche sich in zwei Klassen einteilen lassen, erstens:

$$(4) \quad \begin{cases} (\alpha_r - \pi, \ 2p\pi - \delta_p), \quad \big(2p\pi + \varepsilon_p, \ 2(p+1)\pi - \delta_{p+1}\big), \quad \cdots, \\ \qquad \big(2(p+q)\pi + \varepsilon_{p+q}, \ \beta_r - \pi\big) \end{cases}$$

und zweitens:

$$(5) \quad \begin{cases} (2p\pi - \delta_p, 2p\pi + \varepsilon_p), \ \big(2(p+1)\pi - \delta_{p+1}, 2(p+1)\pi + \varepsilon_{p+1}\big), \ \cdots, \\ \qquad \big(2(p+q)\pi - \delta_{p+q}, \ 2(p+q)\pi + \varepsilon_{p+q}\big); \end{cases}$$

hier bedeuten die δ und ε sehr kleine positive, aber endliche Größen.

Betrachten wir nun zuerst das Intervall $(2s\pi - \delta_s, \ 2s\pi + \varepsilon_s)$ so läßt sich das entsprechende Integral:

$$I_s = \int\limits_{2s\pi - \delta_s}^{2s\pi + \varepsilon_s} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\eta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\eta\right)} \cdot \frac{G(x_r, \pi + \eta)}{g_1(x_r, \pi + \eta)} \, d\eta$$

mittelst der Transformation $\eta = 2s\pi + \xi$ folgendermaßen schreiben:

$$(6) \qquad I_s = \int\limits_{-\delta_s}^{+\varepsilon_s} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\xi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\xi\right)} \cdot \frac{G(x_r, 2s\pi + \pi + \xi)}{g_1(x_r, 2s\pi + \pi + \xi)} \, d\xi.$$

Zweitens haben wir das Intervall $\big(2s\pi + \varepsilon_s, \ 2(s+1)\pi - \delta_{s+1}\big)$ zu

untersuchen; das entsprechende Integral läßt sich durch dieselbe Transformation wie oben folgendermaßen umformen:

$$(7)\qquad H_s = \int\limits_{+\varepsilon_s}^{2\pi-\delta_{s+1}} \frac{\sin\left(\frac{2s+1}{2}\xi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\xi\right)} \cdot \frac{G(x_r, 2s\pi+\pi+\xi)}{g_1(x_r, 2s\pi+\pi+\xi)}\, d\xi.$$

Nach diesen Erörterungen werden wir die positive ganze Zahl n über jede Grenze hinaus wachsen, die Zahlen δ und ε aber unbegrenzt abnehmen lassen, jedoch so, daß die Produkte $n\delta$ und $n\varepsilon$ sämtlich mit n unendlich groß werden; dann ergibt der Satz von Dirichlet (T_3) unmittelbar die zwei Grenzwerte:

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty} I_s = 2\pi \cdot \frac{G(x_r, 2s\pi+\pi)}{g_1(\pi_r, 2s\pi+\pi)},$$

$$(9)\qquad \lim_{n=\infty} H_s = 0.$$

Hier muß jedoch bemerkt werden, daß in (8) der Mittelwert zwischen den zwei Funktionswerten zu nehmen ist, falls die Funktion rechter Hand in dem betrachteten Punkte $2s\pi+\pi$ eine Sprungstelle hat, und daß der Ausdruck rechter Hand in (8) zu halbieren ist, falls die Gleichheit $\alpha_r = (2s+1)\pi$ oder $\beta_r = (2s+1)\pi$ eintritt und das entsprechende Integral (6) sonach die Null als untere oder obere Grenze hat.

Auf ganz dieselbe Weise lassen sich die übrigen Integrale mit den Intervallen (4), (5) behandeln; somit erhalten wir schließlich folgende bemerkenswerte Formel:

$$(10)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s F(s, x_r) = 2\pi \cdot \sum_{s=p}^{s=p+q}{}' \frac{\Phi(\omega_s)}{\left(\frac{\partial f(\omega, x_r)}{\partial \omega}\right)_s},$$

wo $\omega_s = g(x_r, 2s\pi+\pi)$, und wo im Nenner, wenn man die Differentiation nach ω ausgeführt hat, diese Variable durch ω_s zu ersetzen ist; der Accent nach dem Summenzeichen zeigt an, daß das entsprechende Glied nach den vorhergehenden Vorschriften zu behandeln ist, falls eine der dort besprochenen Eigentümlichkeiten eintritt.

Es ist noch zu bemerken, daß die ganzen Zahlen p und q von x_r abhängig sind.

Wir gehen jetzt von der elementaren Formel:

$$\text{(B)}\quad\begin{cases} 1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega + 2\cos 3\omega + \cdots + 2\cos n\omega = \\ \qquad = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \end{cases}$$

aus; setzen wir:

$$\text{(11)}\quad (2p-2)\pi < \alpha_r \leqq 2p\pi, \quad (2p+2q)\pi < \beta_r < (2p+2q+2)\pi,$$

so finden wir nach derselben Methode folgende zu (10) analoge Formel:

$$\text{(12)}\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s F(s, x_r) = 2\pi \cdot {\sum_{s=p}^{s=p+q}}' \frac{\Phi(\omega_s')}{\left(\frac{\partial f(\omega, x_r)}{\partial \omega}\right)_s},$$

wo $\omega_s' = g(x_r, 2s\pi)$ *gesetzt ist, und wo der Accent nach dem Summenzeichen sowie das Symbol im Nenner dieselbe Bedeutung wie in* (10) *haben.*

Gehen wir endlich von der dritten elementaren Formel:

$$\text{(C)}\quad\begin{cases} \sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega - \cdots + (-1)^n \sin(2n+1)\omega = \\ \qquad = (-1)^n \dfrac{\sin(2n+2)\omega}{2\cos\omega} \end{cases}$$

aus und setzen wir:

$$\text{(13)}\quad\begin{cases} (2p-1)\dfrac{\pi}{2} < \alpha_r \leqq (2p+1)\dfrac{\pi}{2}, \\ (2p+2q+1)\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta_r < (2p+2q+3)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

so erhalten wir durch dieselbe Methode folgende zu (10), (12) analoge Formel:

$$\text{(14)}\quad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} \mathfrak{F}(2s+1, x_r) = \pi \cdot {\sum_{s=p}^{s=p+q}}' (-1)^{s-1} \cdot \frac{\Phi(\omega_s'')}{\left(\frac{\partial f(\omega, x_r)}{\partial \omega}\right)_s},$$

wo $\omega_s'' = g\left(x_r, (s+\frac{1}{2})\pi\right)$ *gesetzt ist, während der Accent nach dem Summenzeichen und das Symbol im Nenner dieselbe Bedeutung haben wie vorher.*

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns nunmehr zu einigen bemerkenswerten Anwendungen, welche uns späterhin sehr nützlich sein werden.

§ 129. Neue Auflösungen der Keplerschen Gleichung.

Zum Zwecke einer ersten Anwendung unserer allgemeinen Formeln setzen wir:

(1) $$f(\omega, x) = \nu\omega - x \sin\omega, \quad |\nu| \geq |x|,$$

wo ν und x reell sein müssen; die Funktion $f(\omega, x)$ genügt dann, wie deutlich aus unseren Bemerkungen in § 23 hervorgeht, den Bedingungen 1) und 2) des § 127. Wir nehmen hier als Integrationsgrenzen $a = 0$, $b = \pi$ und setzen:

(2) $$\begin{cases} F^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi} \cos(\nu\omega - x\sin\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega, \\ \mathfrak{F}^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin(\nu\omega - x\sin\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega, \end{cases}$$

so daß diese Funktionen als Verallgemeinerungen von $\Psi^{\nu}(x)$ und $\Omega^{\nu}(x)$ anzusehen sind; sie genügen übrigens, was man leicht nachweisen kann, der zweiten Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen, besitzen also das in § 114 gegebene Additionstheorem und lassen sich endlich nach der Soninschen Formel in Neumannsche Reihen der ersten Art entwickeln.

Die allgemeinen Formeln des vorhergehenden Paragraphen liefern noch folgende spezielleren:

(3) $$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s F^{s\nu}(sx) = \frac{2}{|\nu|} \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{\Phi(\omega_s)}{1 - \frac{x}{\nu}\cos\omega_s},$$

wo die positive ganze Zahl p so zu bestimmen ist, daß:

(4) $$2p + 1 \leq |\nu| < 2p + 3$$

ist, während ω_s die reelle Wurzel folgender Keplerschen Gleichung bedeutet[1]):

(5) $$\nu\omega_s - x\sin\omega_s = \operatorname{sgn}\nu \cdot (2s+1)\pi.$$

Weiter finden wir:

(6) $$\sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s F^{s\nu}(sx) = \frac{2}{|\nu|} \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{\Phi(\omega_s')}{1 - \frac{x}{\nu}\cos\omega_s'},$$

wo:

(7) $$2p \leq |\nu| < 2p + 2, \quad \nu\omega_s' - x\sin\omega_s' = \operatorname{sgn}\nu \cdot 2s\pi$$

zu nehmen ist.

1) Das Zeichen $\operatorname{sgn} x$ (signum) bedeutet das Vorzeichen von x.

Endlich erhalten wir noch folgende dritte Formel:

$$(8)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} \mathfrak{F}^{2s\nu+\nu}\big((2s+1)x\big) = \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{(-1)^{s-1}\Phi(\omega_s'')}{\nu - x\cos\omega_s''},$$

wo wir:

$$(9)\quad 2p+1 \leq |2\nu| < 2p+3, \qquad \nu\omega_s'' - x\sin\omega_s'' = \operatorname{sgn}\nu \cdot \frac{2s+1}{2}\pi$$

zu setzen haben.

Der Accent nach dem Summenzeichen hat auch hier die gewöhnliche Bedeutung; außerdem ist wohl zu bemerken, daß in (6) das zu $s = 0$ gehörige Glied immer zu halbieren ist. Nehmen wir in (3) und (8) $|\nu| < 1$, bez. $|\nu| < \frac{1}{2}$ an, so fallen die Summen rechter Hand aus, und wir gelangen so zu dem bemerkenswerten Satz:

Die durch die unendlichen Reihen (3) *und* (8) *definierten Funktionen haben im Intervalle* $-1 < \nu < +1$, *bez.* $-\frac{1}{2} < \nu < +\frac{1}{2}$ *einen Invariabilitätsbereich, in welchem die betreffende Funktion die Summe Null besitzt.*

Übrigens stellen die unendlichen Reihen in (3), (6), (8) in den durch (4), (7), (9) bestimmten Intervallen infolge der verschiedenen Werte von p verschiedene Funktionen dar, welche in den Grenzpunkten zweier aufeinander folgender Intervalle identisch sind.

Die Annahme $\Phi(\omega) = 1$ führt zu den in § 17 eingeführten Poisson-Angerschen Funktionen; man findet folgende einfache Formeln:

$$(10)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s \Psi^{s\nu}(sx) = 2\operatorname{sgn}\nu \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{1}{\nu - x\cos\omega_s},$$

$$(11)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s \Psi^{s\nu}(sx) = 2\operatorname{sgn}\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{1}{\nu - x\cos\omega_s'},$$

$$(12)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} \Omega^{2s\nu+\nu}\big((2s+1)x\big) = \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{(-1)^{s-1}}{\nu - x\cos\omega_s''};$$

die weitere Annahme:

$$\Phi(\omega) = 1 - \frac{x}{\nu}\cdot\cos\omega$$

führt dagegen zu den Formeln (T_8), (T_{11}) und (T_{12}) für $n = 0$.

Setzt man nun in (10), (11), (12) $\nu = n$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, welche in der letzten Formel überdies ungerade sein muß, und weiterhin nx für x, so erhält man gewisse Kapteynsche Reihen der ersten Art, welche sich jedoch unmittelbar aus den Reihenentwicklungen § 23, (5), (6) herleiten lassen.

Die allgemeinen Formeln (3), (6), (8) lassen sich indessen in gewissen Fällen noch auf eine andere Form bringen; nimmt man nämlich die Funktion $\Phi(\omega)$ als differentiabel an und setzt man ferner:

$$\Phi(\omega) = \left(1 - \frac{x}{\nu} \cos \omega\right) H(\omega),$$

so ergibt eine partielle Integration:

$$(13) \quad \begin{cases} F^{\nu}(x) = \frac{\sin \nu\pi}{\nu\pi} H(\pi) - \frac{1}{\nu\pi} G^{\nu}(x), \\ \mathfrak{F}^{\nu}(x) = \frac{1}{\nu\pi}\left(H(0) - \cos \nu\pi\, H(\pi)\right) + \frac{1}{\nu\pi} \mathfrak{G}^{\nu}(x), \end{cases}$$

wo man:

$$(14) \quad \begin{cases} G^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(\nu\omega - x \sin \omega)\, H^{(1)}(\omega)\, d\omega, \\ \mathfrak{G}^{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(\nu\omega - x \sin \omega)\, H^{(1)}(\omega)\, d\omega \end{cases}$$

gesetzt hat.

Führt man nun in den betreffenden allgemeinen Formeln die Ausdrücke (13) ein, so gewinnt man nach einer Anwendung von (T_8), (T_{11}) und (T_{12}) folgende weiteren Formeln:

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \cdot G^{s\nu}(sx) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} (\nu\omega - x \sin \omega)\, H^{(1)}(\omega)\, d\omega + \\ \qquad + \pi \operatorname{sgn} \nu \cdot {\sum_{s=1}^{s=p}}' \left(H(\omega_s) - H(\pi)\right), \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \cdot G^{s\nu}(sx) = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} (\nu\omega - x \sin \omega)\, H^{(1)}(\omega)\, d\omega - \\ \qquad - \pi \cdot \operatorname{sgn} \nu \cdot {\sum_{s=0}^{s=p}}' \left(H(\omega_s') - H(\pi)\right), \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \cdot \mathfrak{G}^{2s\nu+\nu}\left((2s+1)x\right) = \\ = \left(H(\pi) - H(0)\right) = \frac{\pi}{2} \cdot {\sum_{s=1}^{s=p}}' (-1)^{s-1}\left(H(\omega_s'') - H(\pi)\right). \end{cases}$$

Durch die Annahme $H(\omega) = \omega$ gelangen wir dann zu folgenden spezielleren Formeln:

$$(18) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \cdot \Omega^{s\nu}(sx) = \frac{\nu\pi^2}{4} - x + \pi \cdot \operatorname{sgn} \nu \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' (\omega_s - \pi),$$

$$(19) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \cdot \Omega^{s\nu}(sx) = x - \frac{\nu\pi^2}{4} - \pi \cdot \operatorname{sgn} \nu \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' (\omega_s' - \pi),$$

$$(20) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \Psi^{2s\nu+\nu}\big((2s+1)x\big) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1}(\omega_s'' - \pi).$$

Die durch die letzte Reihe definierte Funktion hat also in dem Intervalle $-\frac{\pi}{2} < \nu < +\frac{\pi}{2}$ einen Invariabilitätsbereich.

Die Entwicklungen (15) und (18) ermöglichen uns außerdem neue Auflösungen der Keplerschen Gleichung:

$$\omega - e \sin \omega = \varphi$$

durch unendliche Reihen. Zu diesem Zwecke bemerken wir vorerst, daß wir uns auf denjenigen Fall beschränken können, in welchem $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt wird. Denken wir uns nämlich φ so gegeben, daß die obengenannten Ungleichheiten wirklich stattfinden, und bezeichnen wir mit $\omega(\varphi, e)$ die reelle Lösung der vorgelegten Keplerschen Gleichung, so finden wir ohne Mühe folgende drei Formeln:

$$\omega(-\varphi, e) = -\omega(\varphi, e); \quad \omega(\varphi + p\pi, e) = p\pi + \omega\big(\varphi, (-1)^p e\big);$$
$$\omega(\pi - \varphi, e) = \pi - \omega(\varphi, e),$$

und damit ist unsere Behauptung ja bewiesen.

Die Annahmen $\nu = \frac{\pi}{\varphi}$, $x = \frac{\pi e}{\varphi}$, also $1 < \nu < 2$, liefern nun unmittelbar folgende Entwicklungen:

$$(21) \quad \begin{cases} H(\omega) = H(\pi) - \dfrac{1}{2\varphi} \cdot \displaystyle\int_0^\pi (\sigma - e \sin \sigma) H^{(1)}(\sigma)\, d\sigma + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} G^{\frac{s\pi}{\varphi}}\left(\frac{se\pi}{\varphi}\right), \end{cases}$$

$$(22) \quad \omega = \pi + \frac{4e - \pi^2}{4\varphi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \Omega^{\frac{s\pi}{\varphi}}\left(\frac{se\pi}{\varphi}\right);$$

ferner führen die Annahmen $\nu = \frac{\pi}{2\varphi}$, $x = \frac{\pi e}{2\varphi}$, also $\frac{1}{2} < \nu < 1$, zu folgenden anderen Entwicklungen:

$$(23)\qquad H(\omega) = 3H(\pi) - H(0) - \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\cdot \mathfrak{G}^{\frac{2s+1}{\pi\varphi}}\left(\frac{2s+1}{2\varphi}\pi e\right),$$

$$(24)\qquad \omega = \pi - \frac{2}{\pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{2s+1}\cdot \Psi^{\frac{2s+1}{2\varphi}}\left(\frac{2s+1}{2\varphi}\cdot \pi e\right).$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß uns die Poisson-Angerschen Funktionen erlauben, die beiden unabhängigen Veränderlichen e und φ in eine einzige Funktion hineinzubringen, während sie bei der Besselschen Auflösung getrennt vorkommen, nämlich φ in dem cosinus und e in den Cylinderfunktionen, welche als Koeffizienten in der Fourierschen Reihe auftreten. Die praktische Anwendbarkeit dieser zwei neuen Formeln scheint indessen eine ziemlich geringe zu sein.

Wir bemerken noch vorübergehend, daß die Formeln § 127, (13), (14), auf die Funktionen $\Psi^\nu(x)$ und $\Omega^\nu(x)$ angewendet, die in § 124 auf ganz andere Weise hergeleiteten Formeln von (18) bis (24) wiedergeben, während uns § 127, (11), (12) hinwiederum die Kapteynschen Reihen § 121, (6) liefern.

§ 130. Anwendung der Funktion $f(\omega, x) = \omega \cdot x$.

Zu einer noch schöneren Anwendung der in den §§ 127, 128 gegebenen allgemeinen Formeln führen die Annahmen:

$$f(\omega, x) = \omega \cdot x, \quad a = 0;$$

die Variable x hat hier ein Intervall kontinuierlich zu durchlaufen, während wir für die entsprechenden Funktionen $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ folgende Formeln finden:

$$(1)\qquad F(\alpha, x) = F(\alpha\cdot x),\quad \mathfrak{F}(\alpha, x) = \mathfrak{F}(\alpha\cdot x),$$

so daß wir mittelst der allgemeinen Entwicklungen des § 128 folgende Formeln erhalten:

$$(2)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\varepsilon_s F(sx) = \frac{2\pi}{|x|}\cdot\sum_{s=1}^{s=p}{}' \Phi\left(\frac{(2s-1)\pi}{|x|}\right),$$

wo die positive ganze Zahl der Bedingung:

$$(2a)\qquad (2p-1)\pi \leqq |bx| < (2p+1)\pi$$

genügt, und:

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s F(sx) = \frac{2\pi}{bx} \sum_{s=1}^{s=p}{}' \Phi\left(\frac{2s\pi}{bx}\right)$$

mit den Bedingungen:

$$(3\text{a})\qquad 2p\pi \leqq |bx| < (2p+2)\pi;$$

endlich gewinnt man folgende dritte Formel:

$$(4)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathfrak{F}\left((2s+1)x\right) = \frac{\pi}{2bx} \sum_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1} \Phi\left(\frac{(2s-1)\pi}{2bx}\right)$$

mit den Bedingungen:

$$(4\text{a})\qquad (2p-1)\pi \leqq |2bx| < (2p+1)\pi.$$

In dem spezielleren Falle $p = 0$ ergeben die Formeln (2) und (4) unmittelbar den Satz:

Die durch die unendlichen Reihen (2) und (4) definierten Funktionen haben in den Intervallen $-\frac{\pi}{b} < x < +\frac{\pi}{b}$, *bzw.* $-\frac{\pi}{2b} < x < +\frac{\pi}{2b}$ *einen Invariabilitätsbereich, in welchem die betreffende Funktion den konstanten Wert Null hat.*

Übrigens stellen die drei oben angegebenen unendlichen Reihen in den durch die verschiedenen Werte von b aus (2a), (3a), (4a) bestimmten Intervallen verschiedene Funktionen von x dar, welche in den Grenzpunkten der Intervalle identisch sind.

Die zu den hier betrachteten Funktionen $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ gehörigen Verallgemeinerungen der Bernoullischen Funktionen lassen sich ohne Mühe bilden, so daß wir unmittelbar zu den direkten Anwendungen übergehen dürfen.

Zuerst betrachten wir die Poisson-Angerschen Funktionen $\Pi^\nu(x)$ und $\mathsf{X}^\nu(x)$; wir haben hier:

$$(5)\qquad \Phi(\omega) = \frac{\cos(\nu \arccos \omega)}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad b = 1$$

zu setzen, woraus sich mittelst § 17, (12a), (13a):

$$(6)\qquad F(x) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}} \cdot \Pi^\nu(x), \quad \mathfrak{F}(x) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}} \cdot \mathsf{X}^\nu(x)$$

ergibt, so daß wir in diesem Falle folgende Formeln erhalten:

$$(7)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s \Pi^\nu(sx) = \frac{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}{x} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{\cos(\nu\omega_s)}{\sqrt{1-\frac{(2s-1)^2\pi^2}{4x^2}}},$$

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s \Pi^\nu(sx) = 2\cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{\cos(\nu\omega_s')}{\sqrt{x^2-4s^2\pi^2}},$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} X^\nu\big((2s+1)x\big) = \\ \displaystyle\qquad\qquad = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{(-1)^{s-1}\sin(\nu\omega_s'')}{\sqrt{4x^2-(2s-1)^2\pi^2}}, \end{cases}$$

wo wir beziehentlich:

$$(10)\qquad (2p-1)\pi \leqq |x| < (2p+1)\pi,\quad 2p\pi \leqq |x| < (2p+2)\pi,$$
$$(2p-1)\pi \leqq |2x| < (2p+1)\pi$$

annehmen müssen, und wo die Größen ω_s, ω_s', ω_s'' folgendermaßen zu bestimmen sind:

$$(10\text{a})\qquad \cos\omega_s = \frac{(2s-1)\pi}{|x|},\quad \cos\omega_s' = \frac{2sx}{|x|},\quad \cos\omega_s'' = \frac{(2s-1)\pi}{|2x|}.$$

Aus diesen Formeln läßt sich eine große Menge anderer herleiten. Erstens finden wir zum Beispiel, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet:

$$(11)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} J^{2n}(sx) = (-1)^{n-1} 2\cdot \sum_{s=1}^{s=\nu}{}' \frac{\cos(2n\omega_s)}{\sqrt{x^2-(2s-1)^2\pi^2}},$$

$$(12)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} J^{2n}(sx) = (-1)^n 2\cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{\cos(2n\omega_s')}{\sqrt{x^2-4s^2\pi^2}}$$

und, wenn n nur eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet:

$$(13)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} J^{2n+1}\big((2s+1)x\big) = \frac{(-1)^n \operatorname{sgn} x}{2}\cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{(-1)^{s-1}\sin\big((2n+1)\omega_s''\big)}{\sqrt{4x^2-(2s-1)^2\pi^2}};$$

in dem in (11), (12) ausgeschlossenen speziellen Falle $n = 0$ finden wir endlich:

$$(11\text{a})\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s J^0(sx) = 4\cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \frac{1}{\sqrt{x^2-(2s-1)^2\pi^2}},$$

$$(12\text{a})\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s J^0(sx) = 4\cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \frac{1}{\sqrt{x^2-4s^2\pi^2}}.$$

Zweitens liefern die Formeln § 17, (25), (27) analoge Reihen, welche die Funktionen $\Omega^\nu(x)$ und $T^n(x)$ enthalten; die zugehörigen Formeln lassen sich ohne Mühe herleiten, so daß wir sie übergehen

dürfen. Wir bemerken noch, daß die zugehörigen Verallgemeinerungen der Bernoullischen Funktionen hier zu folgenden Nullentwicklungen führen:

$$(13a)\qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n}} \cdot J^{2p}(sx) = 0, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n+1}} \cdot J^{2p+1}(sx) = 0,$$

welche in dem Intervalle $-\pi \leq x \leq +\pi$ anwendbar sind, und in denen p eine positive ganze Zahl $> n$ bedeutet.

Um noch das zweite Besselsche Integral für $J^\nu(x)$ anwenden zu können, haben wir zu setzen:

$$f(\omega) = (1-\omega^2)^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad b = 1;$$

wir gewinnen so unschwer folgende Formeln:

$$(14)\quad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s^\nu} \cdot J^\nu(sx) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,|x|} \cdot {\sum_{s=1}^{s=p}}' (\sin\omega_s)^{2\nu-1},$$

$$(15)\quad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s^\nu} \cdot J^\nu(sx) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,|x|} \cdot {\sum_{s=0}^{s=p}}' (\sin\omega_s')^{2\nu-1},$$

$$(16)\quad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_{2s+1}}{2s+1} \cdot Z^\nu\big((2s+1)x\big) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})x} \cdot {\sum_{s=1}^{s=p}}' (-1)^{s-1} (\sin\omega_s'')^{2\nu-1},$$

wo die Winkel ω_s, ω_s', ω_s'' aus (10a) zu entnehmen sind, und wo $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt werden muß.

Wir können nun auch sehr leicht Entwicklungen bilden, welche nach den Funktionen $\mathfrak{J}^\nu(x)$ und $U^n(x)$ fortschreiten; wir gehen indessen auf diese Frage nicht näher ein, sondern wenden uns nunmehr zur Verallgemeinerung der in (13a) gegebenen Nullentwicklungen.

Kapitel XXV.

Nullentwicklungen in den Schlömilchschen Reihen.

§ 131. Allgemeine Summenformeln.

Die Betrachtungen der §§ 127, 128 lassen sich ohne Schwierigkeit auf die durch mehrfache Integrale definierten, zu $F(x)$ und $\mathfrak{F}(x)$ analogen Funktionen übertragen. Wir beschränken uns auf den Fall eines Doppelintegrales und setzen:

$$(1)\quad\begin{cases} G(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi\sin\omega) f(\varphi,\omega)\, d\varphi\, d\omega, \\ \mathfrak{G}(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi\sin\omega) f(\varphi,\omega)\, d\varphi\, d\omega, \end{cases}$$

wo die Funktion $f(\varphi, \omega)$ so beschaffen sein muß, daß $G(0)$ eine bestimmte und endliche Größe ist. Die Funktionen $G(x)$ und $\mathfrak{G}(x)$ sind somit auch in x ganze transcendente Funktionen, auf welche sich die Formeln § 128, (14) bis (18) ohne weiteres übertragen lassen.

Weiter führt eine Anwendung der elementaren Formel (A) in § 128, wenn man das dort erhaltene Integral mittelst der durch die Gleichung:

$$x\cos\varphi\sin\omega = \alpha$$

definierten neuen Variabelen reduziert, auf folgende andere Formel:

$$(2)\quad\begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{s=n} (-1)^s \varepsilon_s G(sx) = \\ = (-1)^n \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{x\cos\varphi} \dfrac{f\left(\varphi, \arcsin\dfrac{\alpha}{x\cos\varphi}\right)}{\sqrt{x^2\cos^2\varphi - \alpha^2}} \cdot \dfrac{\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\, d\varphi\, d\alpha, \end{cases}$$

so daß wir also den Wert des Doppelintegrales rechter Hand für unendlich wachsende n zu bestimmen haben.

Zu diesem Behufe zeichnen wir einen Zug der Kurve mit folgender Gleichung:

$$\alpha = x\cos\varphi,$$

wo φ als Abscisse, α als Ordinate anzusehen ist. Wir bezeichnen mit O den Ursprung, mit A und B die Schnittpunkte der Kurve mit den positiven Richtungen der Abscissen-, bez. Ordinatenachse; es handelt sich dann darum, den Wert unseres über den Bereich AOB genommenen Doppelintegrales zu berechnen[1]). Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$(3)\qquad (2p-1)\pi < x < (2p+1)\pi,$$

wo p eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und bestimmen auf dem Bogen AB die Punkte C_q mit den Koordinaten:

$$(4)\quad\begin{cases} \varphi_q = \arccos\dfrac{(2q-1)\pi}{x}, \quad \alpha_q = \dfrac{(2q-1)\pi}{x}, \\ q = 1, 2, 3, \ldots, p. \end{cases}$$

1) A ist derjenige Schnittpunkt, der die kleinste positive Abscisse hat.

Wir schneiden nun durch schmale Kanäle, deren Ränder mit der Abscissenachse parallel laufen, die Punkte (4) aus dem Bereiche AOB aus, so daß die Ränder des zu C_q gehörigen Kanales folgende Gleichungen haben:

$$(5)\qquad \alpha_q' = \frac{(2q-1)\pi - \delta_q}{x}, \quad \alpha_q'' = \frac{(2q-1)\pi + \varepsilon_q}{x},$$

wo δ_q und ε_q sehr kleine, aber endliche positive Größen bedeuten. Durch die mittelst (5) definierten Kanäle zerteilen wir den Bereich AOB in mehrere andere, nämlich 1) die Bereiche b_q, welche von den Geraden α_q' und α_q'' und dem Bogen AB begrenzt werden; 2) die Bereiche a_q, welche zwischen den α_q'' und α_{q+1}' liegen, jedoch so, daß a_1 zwischen der Abscissenachse und α_1', a_p aber zwischen α_p'' und dem letzten Stück des Bogens AB liegt. Es ist darnach offenbar, daß die Punkte (4) sämtlich in die Bereiche b_q fallen müssen. Wir bezeichnen nun weiter durch H_q, bez. I_q den Wert des obenerwähnten über den Bereich a_q, bez. b_q erstreckten Doppelintegrales.

Nach diesen Überlegungen lassen wir nun die positive ganze Zahl n unbegrenzt wachsen, während δ_q und ε_q sämtlich der Null zustreben, aber so, daß die Produkte $n\delta_q$ und $n\varepsilon_q$ allesamt unbegrenzt wachsen; dann liefert das Theorem von Dirichlet, falls die Funktion:

$$f\left(\varphi, \arcsin \frac{\alpha\pi}{x\cos\varphi}\right)$$

die gewöhnlichen Bedingungen erfüllt, folgende Ergebnisse:

$$\lim_{n=\infty} H_q = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} I_q = \frac{2\pi}{x} \cdot \int_0^{\arccos\frac{(2q-1)\pi}{x}} \frac{f\left(\varphi, \arcsin\frac{(2q-1)\pi}{x\cos\varphi}\right)}{\sqrt{x^2\cos^2\varphi - (2q-1)^2\pi^2}}\, d\varphi;$$

setzen wir weiter der Kürze halber:

$$\varphi = \arcsin(k_q\beta), \quad k_q = \sqrt{1 - \frac{(2q-1)^2\pi^2}{x^2}}, \quad f = \psi(k_q, \beta),$$

so finden wir:

$$(6)\qquad \lim_{n=\infty} I_q = \frac{2\pi}{x} \cdot \int_0^1 \frac{\psi(k_q, \beta)}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-k_q^2\beta^2)}}\, d\beta.$$

Wir haben noch den speziellen Fall $x = (2p-1)\pi$ zu untersuchen; hier ist der Gipfelpunkt B des Kurvenzuges selbst ein

kritischer Punkt von dem Charakter (4). Um das entsprechende Integral I_p mit den Grenzen $\alpha = x - \varepsilon$ bis $\alpha = x$ und $\varphi = 0$ bis $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)$ zu bestimmen, wo ε eine sehr kleine, aber endliche positive Größe bedeutet, setzen wir:

$$\alpha = x - \gamma, \quad \varphi = \arccos(k\beta), \quad k = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right)^2}$$

und finden alsdann, falls $f(\varphi, \omega)$ in der Umgebung von $\varphi = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ kontinuierlich ist, für das Integral folgenden Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty} I_p = \frac{2}{x} f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \int_0^1 \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

also genau die Hälfte von dem aus (6) für $q = p$ gefundenen Integrale.

Führen wir nun im allgemeinen folgende Bezeichnungen ein:

$$\psi(\lambda, z) = f\left(\arcsin(\lambda z), \quad \arcsin\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 z^2}}\right),$$
$$\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2},$$

so daß λ' den zu λ komplementären Modul darstellt, falls elliptische Integrale in Frage kommen, so finden wir ohne Mühe die allgemeine Formel:

$$(7) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s G(sx) = \frac{2\pi}{|x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \int_0^1 \frac{\psi(k_s, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_s^2 z^2)}} dz,$$

wo wir für k_s und für den komplementären Modul k_s' die Ausdrücke:

$$(8) \qquad k_s = \sqrt{1 - \frac{(2s-1)^2\pi^2}{x^2}}, \quad k_s' = \frac{(2s-1)\pi}{|x|}$$

erhalten, während die ganze Zahl p so zu bestimmen ist, daß:

$$(9) \qquad (2p-1)\pi \leqq |x| < (2p+1)\pi;$$

falls bei der unteren Grenze in (9) die Gleichheit eintritt, ist das zu $s = p$ gehörige Glied zu halbieren.

Wenn $-\pi < x < +\pi$ vorausgesetzt wird, verschwindet die Summe rechter Hand in (7), weil dann kein kritischer Punkt vom Charakter (4) mehr vorhanden ist; wir müssen aber doch bemerken, daß für $x = 0$ die Reihe linker Hand in (7) im allgemeinen keine bestimmte Summe besitzt; denn diese Summe ist entweder gleich $+\frac{1}{2}G(0)$ oder gleich $-\frac{1}{2}G(0)$, je nachdem die Anzahl der Glieder als ungerade oder gerade angenommen wird.

Die elementare Formel (C) in § 128 führt auf dieselbe Weise zu der andern:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} \mathfrak{G}\left((2s+1)x\right) = \\ \qquad = \frac{\pi}{|x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1} \cdot \int_{l_s'}^{1} \frac{\psi(l_s, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-l_s^2 z^2)}}\, dz, \end{cases}$$

wo:

$$(11)\qquad l_s = \sqrt{1 - \frac{(2s-1)^2 \pi^2}{4x^2}}, \quad l_s' = \frac{(2s-1)\pi}{|2x|}$$

sein muß, während:

$$(12)\qquad (2p-1)\pi \leqq |2x| < (2p+1)\pi$$

vorauszusetzen ist; der Accent nach dem Summenzeichen hat dieselbe Bedeutung wie vorher; für $-\pi < 2x < +\pi$ verschwindet die Summe rechter Hand in (10), und für $x = 0$ hat unsere Reihe hier die Summe Null.

Wenden wir uns nunmehr zu der elementaren Formel (B) in § 128, so ist es sehr bemerkenswert, daß die entsprechende Reihe nur dann konvergiert, wenn das Integral:

$$(13)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\varphi, 0)}{\cos\varphi}\, d\varphi$$

einen Sinn hat; in diesem Falle finden wir:

$$(14)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s G(sx) = \frac{2\pi}{|x|} \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \int_0^1 \frac{\psi(m_s, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-m_s^2 z^2)}}\, dz,$$

wo:

$$(15)\qquad m_s = \sqrt{1 - \frac{4s^2\pi^2}{x^2}}, \quad m_s' = \frac{2s\pi}{|x|}$$

gesetzt worden ist, und wo die ganze, nicht negative Zahl p so zu bestimmen ist, daß:

$$(16)\qquad 2p\pi \leqq |x| < (2p+2)\pi$$

ist; der Accent nach dem Summenzeichen bedeutet hier, daß das Glied für $s = 0$ stets zu halbieren ist, und daß dies auch für $s = p$ der Fall sein muß, falls in (16) bei der unteren Grenze die Gleichheit stattfindet. Für $x = 0$ ist unsere unendliche Reihe im allgemeinen divergent.

Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Die durch die unendlichen Reihen (7) *und* (10) *definierten Funktionen haben in den Intervallen* $-\pi < x < +\pi$, *bez.* $-\pi < 2x < +\pi$ *einen Invariabilitätsbereich, in welchem der konstante Wert der betreffenden Funktion immer gleich Null ist.*

Übrigens stellen die unendlichen Reihen (7), (10), (14) in den durch die verschiedenen Werte von p aus (9), (12), (16) bestimmten Intervallen verschiedene Funktionen dar, welche im allgemeinen an den Grenzen identisch sind.

§ 132. Anwendungen der Lommelschen Funktion.

Für eine erste Anwendung der allgemeinen Formeln setzen wir hier:

$$f(\varphi, \omega) = (\sin\varphi)^{\varrho \mp \nu - 1} \cos\varphi\, (\cos\omega)^{\varrho \pm \nu},$$

so daß sich die entsprechenden Funktionen $G(x)$ und $\mathfrak{G}(x)$ mittelst § 32, (4), (7) durch Lommelsche Funktionen ausdrücken lassen; wir setzen ferner der Kürze halber:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho} G^{\nu,\varrho}(x) = \dfrac{\Gamma(\varrho + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}(\nu - \varrho)} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho} \Pi^{\nu,\varrho}(x); \\[2ex] \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho} \mathfrak{G}^{\nu,\varrho}(x) = \dfrac{\Gamma(\varrho + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}(\nu - \varrho)} \cdot \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho} \Pi^{\nu,\varrho+1}(x) \end{cases}$$

und finden:

$$\frac{\psi(\lambda, z)}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \lambda^2 z^2)}} = \frac{\lambda^{2\varrho - 1} z^{\varrho \mp \nu - 1} (1 - z^2)^{\frac{\varrho \pm \nu - 1}{2}}}{(1 - \lambda^2 z^2)^{\frac{\varrho \pm \nu}{2}}},$$

so daß sich das betreffende Integral vermittelst (F_{13}) durch hypergeometrische Reihen ausdrücken läßt. Wir gewinnen in der Tat ohne Mühe folgende Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\varrho} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s^{\varrho}} \cdot G^{\nu,\varrho}(sx) = \\[2ex] \qquad = \dfrac{2}{|x|} \cdot \displaystyle\sum_{s=1}^{s=p}{}' k_s^{2\varrho - 1} F\left(\frac{\varrho + \nu}{2}, \frac{\varrho - \nu}{2}, \varrho + \frac{1}{2}, k_s^2\right), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \left(\frac{2}{x}\right)^{\varrho} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s^{\varrho}} \cdot G^{\nu,\varrho}(sx) = \\ \qquad = \frac{2}{|x|} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=p}{}' m_s^{2\varrho-1} F\left(\frac{\varrho+\nu}{2}, \frac{\varrho-\nu}{2}, \varrho+\frac{1}{2}, m_s^2\right), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{2}{x}\right)^{\varrho} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{(2s+1)^{\varrho}} \cdot \mathfrak{G}^{\nu,\varrho}\left((2s+1)x\right) = \\ \qquad = \frac{2}{x} \cdot \sum\limits_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1} l_s^{2\varrho-1} F\left(\frac{\varrho+\nu}{2}, \frac{\varrho-\nu}{2}, \varrho+\frac{1}{2}, l_s^2\right); \end{cases}$$

in den zwei ersten Formeln muß man natürlich für $s=0$ den leicht zu bestimmenden Grenzwert benutzen. Die Formeln (2), (4) sind sonach anwendbar, falls:

$$(5)\qquad \Re(\varrho \mp \nu) > 0, \qquad \Re(\varrho \pm \nu) > -1$$

vorausgesetzt wird, während (3) die etwas engeren Bedingungen:

$$(6)\qquad \Re(\varrho \mp \nu) > 0, \qquad \Re(\varrho \pm \nu) > 0$$

erfordert.

Zum Zweck einer ersten Spezialisierung der so gewonnenen Formeln setzen wir in (2), (3) $\varrho = \nu - 2n$, in (4) $\varrho = \nu - 2n - 1$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet; weiter setzen wir $\nu + 2n$, bez. $\nu + 2n + 1$ für ν und erhalten so mittelst der Formel (K_6) folgende bemerkenswerten Entwicklungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s^{\nu}} \cdot J^{\nu+2n}(sx) = \\ \qquad = \frac{(-1)^n 2 (2n)!\, \Gamma(\nu)}{|x| \cdot \Gamma(2\nu+2n)} \cdot \sum\limits_{s=1}^{s=p}{}' k_s^{2\nu-1} K^{\nu,2n}\left(\frac{(2s-1)\pi}{x}\right), \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s^{\nu}} \cdot J^{\nu+2n}(sx) = \\ \qquad = \frac{(-1)^n 2 (2n)!\, \Gamma(\nu)}{|x| \cdot \Gamma(2\nu+2n+1)} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=p}{}' m_s^{2\nu-1} K^{\nu,2n}\left(\frac{2s\pi}{x}\right), \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\nu} \cdot \sum\limits_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_{2s+1}}{(2s+1)^{\nu}} \cdot J^{\nu+2n+1}\left((2s+1)x\right) = \\ = \frac{(-1)^n 2\sqrt{\pi}}{x\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \sum\limits_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1} l_s^{2\nu-1} F(\nu+n+\tfrac{1}{2}, -n-\tfrac{1}{2}, \nu+\tfrac{1}{2}, l_s^2), \end{cases}$$

so daß sich die betreffenden Reihen (7) und (8) unter endlicher Form mittelst der Kugelfunktionen summieren lassen.

Für $n = 0$ finden wir die Formeln § 130, (14), (15) wieder, während die Annahme $\nu = 0$ die Formeln (11) bis (13) desselben Paragraphen ergibt.

Über die drei letzten Formeln bemerken wir noch, daß sie vorläufig unter den aus (5) und (6) erhaltenen Bedingungen bewiesen sind; indessen können wir ohne Mühe diese Bedingungen sehr erweitern. Wenden wir in der Tat die gewöhnlichen asymptotischen Ausdrücke für die Cylinderfunktionen der ersten Art an, so ist offenbar, daß sich die sehr entfernten Glieder der betreffenden Reihen, von dem gemeinsamen Faktor $(-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ abgesehen, wie:

$$\frac{(-1)^{s-1}}{s^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \cos\left(sx - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{1}{s^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \cos\left(sx - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{(-1)^{s}}{(2s+1)^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left((2s+1)x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

verhalten. Diese Reihen müssen also dem Satze (T_{14}) zufolge analytische Funktionen von ν definieren, falls x nicht gleich einem ungeraden Multiplum von π, bez. $\pi:2$ vorausgesetzt wird. Dasselbe gilt für die Funktionen rechter Hand in (7), (8), (9), somit sind die obenerwähnten Formeln anwendbar, falls nur $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ ist.

Setzt man weiter in (2), (3), (4) $\varrho = 0$, so erhält man wieder die Formeln § 130, (7), (8), (9), während sich durch die Annahme $\varrho = 1$ aus (2), (3) folgende weiteren Entwicklungen ergeben:

$$(10) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s} \cdot \mathsf{X}^{\nu}(sx) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{4 \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\nu} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \sin(\nu \arcsin k_s),$$

$$(11) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s} \cdot \mathsf{X}^{\nu}(sx) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{4 \sin \frac{\nu\pi}{2}}{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \sin(\nu \arcsin m_s),$$

welche für jeden endlichen Wert von ν anwendbar sind; für $\nu = 1$ findet man folgende spezielleren Formeln:

$$(12) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s} \cdot J^1(sx) = 4 \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' k_s,$$

(13) $$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s} \cdot J^1(sx) = 4 \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' m_s,$$

während die Annahme $\nu = 0$ zu den ähnlichen Formeln:

(14) $$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{s} \cdot \Omega^0(sx) = 4 \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \operatorname{arc} \sin k_s,$$

(15) $$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\varepsilon_s}{s} \cdot \Omega^0(sx) = 4 \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=0}^{s=p}{}' \operatorname{arc} \sin m_s$$

führt.

Hier brechen wir unsere Untersuchungen über die Anwendungen der allgemeinen Formeln mit den Lommelschen Funktionen ab und wenden uns nunmehr zu den ähnlichen Entwicklungen, welche nach Produkten zweier Cylinderfunktionen fortschreiten.

§ 133. Anwendungen von Produkten zweier J-Funktionen.

Die Annahme:

$$f(\varphi, \omega) = \cos(\nu\varphi) \cos(2n\omega), \quad f(\varphi, \omega) = \cos(\nu\varphi) \sin(2n+1)\omega,$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, ergibt mittelst § 21, (4), (5) folgende Werte für die entsprechenden Funktionen $G(x)$ und $\mathfrak{G}(x)$:

(1) $$\begin{cases} G(x) = \dfrac{\pi^2}{4} \cdot J^{n+\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right) J^{n-\frac{\nu}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right), \\[2ex] \mathfrak{G}(x) = \dfrac{\pi^2}{4} \cdot J^{n+\frac{1+\nu}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right) J^{n+\frac{1-\nu}{2}}\left(\dfrac{x}{2}\right), \end{cases}$$

so daß sich aus den allgemeinen Formeln § 131, (7), (10):

(2) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s J^{n+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) J^{n-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \frac{2}{\pi \cdot |x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \int_0^1 \frac{\varphi^{2n}(k_s, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-k_s^2 z^2)}}\, dz, \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} J^{n+\frac{1+\nu}{2}}\left(\frac{2s+1}{2}\, x\right) J^{n+\frac{1-\nu}{2}}\left(\frac{2s+1}{2}\, x\right) = \\[2ex] \displaystyle\qquad = \frac{2}{\pi x} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' \int_0^1 \frac{\varphi^{2n+1}(m_s, z)}{\sqrt{(1-z^2)(1-m_s^2 z^2)}}\, dz \end{cases}$$

ergibt, wo wir der Kürze halber:

$$(4)\qquad \varphi^{2n}(\lambda, z) = \cos(\nu \arcsin \lambda z) \cdot \sin\left(2n \arcsin \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 z^2}}\right),$$

$$(5)\quad \varphi^{2n+1}(\lambda, z) = \cos(\nu \arcsin \lambda z) \cdot \sin\left((2n+1) \arcsin \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^2 z^2}}\right)$$

gesetzt haben.

Die aus § 131, (14) erhaltene spezielle Reihe wird hier immer divergent, wenn ν nicht die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl bedeutet; denn erstens wird sonst das Integral § 131, (13) logarithmisch unendlich, und zweitens zeigt der asymptotische Ausdruck für die J-Funktion, daß die obenerwähnte Reihe wie die harmonische Reihe divergiert. Die für ganze ungerade Werte des Parameters ν erhaltene konvergente Reihe ist ohne besonderes Interesse, weil sie nur eine Folge der Formeln (T_{10}) und (T_{11}) ist.

Wenden wir uns daher wieder zu den Reihen (2), (3), so finden wir an ihnen folgende Eigenschaften:

1) *Die Reihen* (2), (3) *haben in den Intervallen* $-\pi < x < +\pi$, *bez.* $-\pi < 2x < +\pi$ *einen Invariabilitätsbereich, in welchem die Summe der Reihe immer gleich Null ist, außer für* $x = 0$, *wo* (2) *bisweilen oscillierend wird.*

2) *Wenn* ν *eine ganze Zahl ist, welche ungerade, bez. gerade vorausgesetzt wird, werden die Reihen* (2), (3) *mit bekannten trigonometrischen Reihen identisch.*

Es ist dies eine unmittelbare Folge von den in § 11, (8), (9) gegebenen Ausdrücken für die Poissonschen Cylinderfunktionen.

Weiter erhalten wir folgenden merkwürdigen Satz:

3) *Bedeutet* ν *eine ganze Zahl, welche gerade, bez. ungerade sein muß, so lassen sich die Summen der unendlichen Reihen* (2), (3) *als lineare Funktionen einer endlichen Anzahl von vollständigen elliptischen Integralen darstellen.*

Die Funktionen φ reduzieren sich dann nämlich auf rationale Funktionen der Größe $1 - \lambda^2 z^2$, und der Satz ist sonach eine direkte Folge des bekannten Satzes über die Reduktion solcher Integrale. Setzen wir zum Beispiel $n = 0$ und $\nu = 0$, bez. $\nu = 1$, so gewinnen wir die schönen Formeln:

$$(6)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s \left(J^0\left(\frac{sx}{2}\right)\right)^2 = \frac{2}{\pi|x|} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' F\left(\frac{\pi}{2}, k_s\right),$$

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_{2s+1} J^0\left(\frac{2s+1}{2}x\right) J^1\left(\frac{2s+1}{2}x\right) = \\ \qquad = \frac{2}{\pi x} \cdot \sum_{s=1}^{s=p}{}' (-1)^{s-1} l_s' F\left(\frac{\pi}{2}, l_s\right), \end{cases}$$

wo $F\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right)$ das vollständige elliptische Integral der ersten Art mit dem Modul λ bedeutet, während λ' wie gewöhnlich der zu λ komplementäre Modul ist.

In dem Falle $n = 0$, $\nu = 2$, bez. $\nu = 3$ findet man in den Summen der zwei Reihen (6), (7) auch Integrale der zweiten Art, während die Annahme $n = 1$, $\nu = 2$, bez. $\nu = 3$ schon auf Integrale der dritten Art führt.

Endlich erhalten wir noch folgenden Satz:

4) *Bedeutet* ν *einen irreduziblen Bruch* $p : q$, *so lassen sich die Summen der unendlichen Reihen* (2), (3) *als lineare Funktionen einer endlichen Anzahl von hyperelliptischen Integralen darstellen, in welchen die Polynome unter den Radikalen vom Grade* $q + 2$, *bez.* $q + 1$ *sind, je nachdem* p *gerade oder ungerade ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir:

$$\lambda z = \sin \eta$$

und finden so:

$$\frac{\varphi^n(\lambda, z)\, dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \lambda^2 z^2)}} = \frac{\cos\left(\frac{p\eta}{q}\right) f^n(\cos \eta)}{\sqrt{\cos^2 \eta - \lambda'^2}}\, d\eta,$$

wo $f(x)$ eine rationale Funktion von x bedeutet. Setzen wir nun weiter:

$$\cos^2\left(\frac{\eta}{q}\right) = \xi,$$

so erhalten wir:

$$dy = -\frac{q\, d\xi}{2\sqrt{\xi(1 - \xi)}};$$

damit ist der Satz bewiesen.

In den Spezialfällen $\nu = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{3}$ reduzieren sich die obengenannten hyperelliptischen Integrale auf nicht vollständige elliptische.

§ 134. Die Schlömilchschen Reihen gestatten sämtlich eine Nullentwicklung.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen gegebenen spezielleren Reihen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Schlömilchschen Reihen, indem sie zeigen, daß diese Reihen sämtlich unendlich vieldeutig sein müssen.

Die Theorie der Schlömilchschen Reihen ist im allgemeinen noch fast ganz unausgebildet. Da zudem die eben erwähnte unendliche Vieldeutigkeit ihr Interesse beträchtlich vermindert, wollen wir hier eine solche allgemeine Theorie gar nicht zu geben versuchen, sondern uns auf einen engeren Fall beschränken, welcher gleichwohl so allgemein ist, daß es außer allem Zweifel gesetzt wird, daß solche Entwicklungen, auch außer den ganz einfachen Spezialfällen, wirklich existieren.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Funktion $f(x)$, welche so beschaffen ist, daß $f^{(1)}(x)$ existiert und daß außerdem die Funktion $f(\alpha x) + \alpha x f^{(1)}(\alpha x)$ in eine Fouriersche Reihe:

$$(1) \qquad f(\alpha x) + \alpha x f^{(1)}(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \Big(a_s(\alpha) \cos(sx) + b_s(\alpha) \sin(sx) \Big)$$

entwickelt werden kann, eine Reihe, welche für $-1 \leqq \alpha \leqq +1$ und $-\pi < x < +\pi$ gleichmäßig konvergiert. Folglich dürfen wir unmittelbar die Integralidentitäten (I_2) und (I_4) auf (1) anwenden. Um die Identität (I_4):

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^{(1)}(x \sin\varphi \sin\omega)\, x \sin\omega\, (\operatorname{tg}\omega)^{2\nu} (\cos\varphi)^{2\nu}\, d\varphi\, d\omega = \\ \qquad\qquad = \dfrac{\pi}{2\cos\nu\pi}\Big(F(x) - F(0)\Big) \end{cases}$$

auf (1) anwenden zu können, setzen wir in dieser Formel $\alpha \sin\omega$ für α, $x \sin\varphi$ für φ, und die gliedweise Anwendung von (2), welche ja erlaubt ist, liefert nun unmittelbar folgende Entwicklung in eine *Schlömilchsche Reihe der ersten Art:*

$$(3) \qquad f(\alpha x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{\mathfrak{a}_s^{\nu}(\alpha)}{s^{\nu}} J^{\nu}(sx) + \frac{\mathfrak{b}_s^{\nu}(\alpha)}{s^{\nu}} Z^{\nu}(sx) \right),$$

wo wir der Kürze halber:

$$(3a) \qquad \mathfrak{a}_s^{\nu}(\alpha) = \frac{2\cos\nu\pi}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_s(\alpha \sin\omega) \sin\omega\, (\operatorname{tg}\omega)^{2\nu}\, d\omega,$$

$$(3b) \qquad \mathfrak{b}_s^{\nu}(\alpha) = \frac{2\cos\nu\pi}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} b_s(\alpha \sin\omega) \sin\omega\, (\operatorname{tg}\omega)^{2\nu}\, d\omega$$

gesetzt haben; die Reihe (3) ist demnach jedenfalls anwendbar, falls $-\frac{1}{2} < \Re(\nu) < +\frac{1}{2}$ und außerdem $-\pi < x < +\pi$ vorausgesetzt wird.

Die Identität (I_2):

$$(4)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^{(1)}(x\cos\varphi\sin 2\omega)\, x\sin 2\omega (\operatorname{tg}\omega)^\nu \cos(\nu\varphi)\, d\varphi\, d\omega = \frac{\pi}{2}\Big(F(x)-F(0)\Big)$$

ergibt in ähnlicher Weise folgende Entwicklung in eine *Schlömilchsche Reihe der zweiten Art:*

$$(5)\qquad f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\Big(\mathfrak{A}_s^\nu(\alpha)\,\Pi^\nu(sx) + \mathfrak{B}_s^\nu(\alpha)\,X^\nu(sx)\Big)$$

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$(5\text{a})\qquad \mathfrak{A}_s^\nu(\alpha) = \frac{\pi}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a_s(x\sin 2\omega)\sin 2\omega\,(\operatorname{tg}\omega)^\nu\, d\omega,$$

$$(5\text{b})\qquad \mathfrak{B}_s^\nu(\alpha) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} b_s(x\sin 2\omega)\sin 2\omega\,(\operatorname{tg}\omega)^\nu\cdot d\omega;$$

die Reihe (5) ist mithin jedenfalls anwendbar, falls $-2<\Re(\nu)<+2$ und $-\pi<x<+\pi$ vorausgesetzt wird.

In den Spezialfällen $\nu=0$, bez. $\nu=1$ erhalten wir aus (5) folgende Entwicklungen:

$$(6)\qquad f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\Big(\mathfrak{A}_s^0(\alpha)\,J^0(sx) + \mathfrak{B}_s^0(\alpha)\,\Omega^0(sx)\Big),$$

$$(7)\qquad f(\alpha x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\Big(\mathfrak{A}_s^1(\alpha)\,\Omega^1(sx) + \mathfrak{B}_s^1(\alpha)\,J^1(sx)\Big),$$

von welchen die erste auch aus (3) für $\nu=0$ hergeleitet werden kann, während dies mit (7) nicht der Fall ist.

Wir denken uns nun weiter, daß $f(x)$ eine solche Funktion bedeutet, daß sich $f(\alpha x)+\alpha x f^{(1)}(\alpha x)$ mittelst (5) entwickeln läßt; alsdann finden wir unmittelbar diese zwei Erklärungen:

$$f(\alpha x)+\alpha x f^{(1)}(\alpha x)+f(-\alpha x)-\alpha x f^{(1)}(-\alpha x) = 2\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} g_s^\nu(\alpha)\,\Pi^\nu(sx),$$

$$f(\alpha x)+\alpha x f^{(1)}(\alpha x)-f(-\alpha x)+\alpha x f^{(1)}(-\alpha x) = 2\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty} h_s^\nu(\alpha)\,X^\nu(sx);$$

sonach führt uns die Identität (4) für $\nu = 0$ unter Anwendung von § 21, (4), (5) zu folgender Entwicklung in eine *Schlömilchsche Reihe der dritten Art:*

$$(8)\quad \begin{cases} f(\alpha x) = \\ = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(A_s^\nu(\alpha) J^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) J^{-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) + B_s^\nu(\alpha) J^{\frac{1+\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) J^{\frac{1-\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right)\right) \end{cases}$$

mit folgenden Koeffizientenbestimmungen:

$$(8a)\qquad A_s^\nu(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_s^\nu(\alpha \sin 2\omega) \sin 2\omega \, d\omega,$$

$$(8b)\qquad B_s^\nu(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_s^\nu(\alpha \sin 2\omega) \sin 2\omega \, d\omega;$$

die Reihe (8) ist also anwendbar, wenn $-1 \leqq \alpha \leqq +1$, $-2 < \Re(\nu) < +2$, $-\pi < x < +\pi$ vorausgesetzt wird; dieselbe Reihe (8) kann auch aus (3) für $\nu = 0$ unter Anwendung der allgemeinen Formel (4) hergeleitet werden. Die speziellen Fälle $\nu = 0$, bez. $\nu = 1$ von (8) verdienen besonders hervorgehoben zu werden, weil man dann Mischungen der gewöhnlichen Fourierschen und Schlömilchschen Reihen bekommt.

Schlömilch[1]) hat die *formale* Entwicklung nach $J^0(sx)$ angegeben und zwar mittelst der Identität (4), eine nochmalige Anwendung derselben Identität hätte ihn also auch auf die Entwicklung nach den Quadraten derselben Funktionen geführt. Lommel[2]) hat eine Verallgemeinerung der von Schlömilch aufgestellten Reihe versucht; allein seine Entwicklungen sind im allgemeinen *divergent.* Später hat Beltrami[3]) über die Reihen der ersten Art schöne Untersuchungen angestellt. Wir erwähnen noch, daß Coates[4]) ähnliche Entwicklungen, die nach $Y^0(sx)$ fortschreiten, erörtert hat; ich kann aber nicht sehen, daß es ihm gelungen ist, die allgemeine Existenz solcher Reihen in aller Strenge zu erweisen.

Um Beispiele für die drei Schlömilchschen Reihen zu erhalten, kann man die Fourierschen Reihen für die Bernoullischen Funk-

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 2, p. 155—158.
2) Studien über die Besselschen Funktionen p. 59—72; 1868.
3) Rendiconti dell' Istituto Lombardo (2) Bd. 13; 1880.
4) Quarterly Journal of Mathematics Bd. 21, p. 180—190; 1886.

tionen oder für $\cos(\nu x)$ und $\sin(\nu x)$ anwenden. Wir gehen indessen auf diese spezielleren Formeln nicht näher ein, sondern wenden uns nunmehr zu der Frage nach der Eindeutigkeit der Entwicklungen in eine Schlömilchsche Reihe.

Zunächst bemerken wir noch einmal, daß unsere vorhergehende Entwicklungsmethode nur eine sehr spezielle ist; es muß daher möglich sein, erstens die Bedingungen für die zu entwickelnden Funktionen wesentlich zu verallgemeinern und zweitens die Grenzen für $\Re(\nu)$ beträchtlich zu erweitern. Die speziellen Schlömilchschen Reihen in den vorhergehenden Paragraphen zeigen ja in der Tat, daß die obenerwähnten Bedingungen für $f(x)$ gar nicht notwendig sind. Wie sich das nun auch verhalten mag, jedenfalls ist es sehr leicht, für die allgemeinsten Schlömilchschen Reihen folgenden Satz zu beweisen:

Falls eine Funktion in eine Schlömilchsche Reihe entwickelbar ist, muß diese Entwicklung immer eine unendlich vieldeutige sein.

Wir haben ja in der Tat folgende drei Nullentwicklungen:

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \varepsilon_s}{(2sx)^\nu} \cdot J^{\nu+2n}(sx), \quad \Re(\nu) > -\tfrac{1}{2}, \tag{9}$$

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s \Pi^\nu(sx), \tag{10}$$

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \varepsilon_s J^{n+\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right) J^{n-\frac{\nu}{2}}\left(\frac{sx}{2}\right), \tag{11}$$

wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, und wo wie gewöhnlich $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ für $n > 0$ zu nehmen ist. Diese Entwicklungen sind sämtlich in dem Intervalle $-\pi < x < +\pi$ anwendbar, höchstens mit Ausnahme von $x = 0$, wo die betreffende Reihe vielleicht oscillierend werden kann.

In früheren Arbeiten[1]) habe ich nur diejenigen Schlömilchschen Reihen betrachtet, welche kein von x unabhängiges Glied enthalten; für diese Reihen müssen die drei vorstehenden Nullentwicklungen in ähnlicher Weise modifiziert werden; eine solche Definition einer Schlömilchschen Reihe ist indessen als hinfällig anzusehen.

---

1) Bulletin de l'Académie de Danemark 1899, 1900. Mathematische Annalen Bd. 52; 1899. Annali di Matematica (3) Bd. 6; 1901.

Kapitel XXVI.

Theorie der Fourierschen Reihen nach Dini.

§ 135. Sätze von Dini.

Schon in § 61 haben wir auf eine merkwürdige Analogie zwischen den Kreis- und Cylinderfunktionen aufmerksam gemacht, indem wir die Formel (4):

$$(1) \qquad 2\cdot\int_0^1 x\,J^\nu(\alpha^\nu x)\,J^\nu(\beta^\nu x) = \begin{cases} 0 \quad , & \alpha^\nu \neq \beta^\nu, \\ \left(J^{\nu+1}(\alpha^\nu)\right)^2, & \alpha^\nu = \beta^\nu \end{cases}$$

aufstellten, in der α^ν und β^ν Wurzeln der transcendenten Gleichung:

$$(2) \qquad \left(\frac{2}{x}\right)^\nu J^\nu(x) = 0$$

sind und außerdem $\Re(\nu) > -1$ vorausgesetzt werden muß.

Diese Analogie war für $\nu = 0$ schon Fourier[1]) bekannt; er hat davon einen ähnlichen Gebrauch gemacht wie von den entsprechenden Eulerschen Formeln mit Kreisfunktionen. Denkt man sich nämlich eine Entwicklung von folgender Form gegeben:

$$(3) \qquad f(x) = a_1 J^\nu(\alpha_1{}^\nu x) + a_2 J^\nu(\alpha_2{}^\nu x) + a_3 J^\nu(\alpha_3{}^\nu x) + \cdots,$$

wo $\alpha_1{}^\nu, \alpha_2{}^\nu, \alpha_3{}^\nu, \cdots$ die Wurzeln der Gleichung (2) bedeuten, so geordnet, daß stets $|\alpha_{s+1}^\nu| \geqq |\alpha_s^\nu|$ ist, so ergibt die Formel (1) für den allgemeinen Koeffizienten a_n den Ausdruck:

$$(4) \qquad a_n = \frac{2}{\left(J^{\nu+1}(\alpha_n^\nu)\right)^2}\cdot\int_0^1 x f(x)\,J^\nu(\alpha_n^\nu x)\,dx,$$

falls die nach der Multiplikation mit $xJ^\nu(\alpha_n^\nu x)$ folgende gliedweise Integration der unendlichen Reihe rechter Hand in (3) erlaubt ist; für $\nu = \pm\frac{1}{2}$ erhält man daraus genau die bekannte Bestimmung der Koeffizienten einer Fourierschen Reihe nach Kreisfunktionen.

Diese Herleitung der Reihe (3) ist in dem Falle $\nu = 0$ von Fourier benutzt worden; sie ist indes nur eine ganz *formale*, da er ja die wirkliche Existenz der Reihe und die Berechtigung der gliedweisen Integration gar nicht bewiesen hat.

Viele Mathematiker haben seit Fourier eine strenge Herleitung der Formel (3) versucht; indessen ist es im allgemeinen nicht ge-

1) Théorie analytique de la chaleur, chap. VI; Paris 1822.

lungen, die damit verbundenen, überaus großen Schwierigkeiten zu überwinden. So sind zum Beispiel die Beweise von Hankel[1]), Harnack[2]), Gegenbauer[3]) und Sheppard[4]) nicht genau; überhaupt ist es, soviel ich weiß, nur Dini[5]) geglückt, einen wirklich strengen Beweis für die Existenz der obenerwähnten Entwicklung zu geben.

Der große italienische Mathematiker hat noch weit allgemeinere Entwicklungen als (3) untersucht; sein Beweis für diese speziellere Formel ist indessen so eng mit seinen allgemeinen Resultaten verbunden, daß es uns hier viel zu weit führen würde, ihn wiederzugeben; indem wir also den Leser auf das Dinische Werk selbst verweisen, beschränken wir uns hier auf die bloße Citation seiner Sätze:

I. *Die Entwicklung* (3) *mit der Koeffizientenbestimmung* (4) *ist für die zwischen* 0 *und* 1 *willkürlich gegebene reelle Funktion* $f(x)$ *anwendbar, falls* ν *als reell und größer als* $-\frac{1}{2}$ *vorausgesetzt wird und falls* $f(x)$ *übrigens folgenden Bedingungen Genüge leistet:*

1) Das von 0 bis 1 genommene Integral von $x^{1-p} \cdot f(x)$, wo p die größte der zwei Zahlen ν und $\frac{1}{2}$ bedeutet, muß unbedingt konvergent sein; außerdem muß in jedem Punkte des Intervalles (0, 1) sowohl $f(x+0)$ als $f(x-0)$ bestimmt und endlich sein.

2) In keinem Punkte des Intervalles (0, 1) darf $f(x)$ unendlich viele Schwankungen besitzen, oder wenigstens muß dies der Fall sein, nachdem man zu $f(x)$ eine passende Funktion ersten Grades adjungiert hat.

3) Für jeden Punkt x des Intervalles (0, 1) muß eine beliebig kleine Umgebung gefunden werden können, welche nicht im Punkte x selbst enden darf, so daß die Summe der entsprechenden Schwankungen von $f(x)$ willkürlich klein gemacht werden kann.

4) In jedem Punkte des Intervalles (0, 1) muß $f(x)$ eine Ableitung oder wenigstens eine solche größte Schwankung besitzen, daß $|f(x)|$ integrabel ist.

5) Das Verhältnis:

$$\frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t}$$

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8.

2) Sitzungsberichte der Leipziger Akademie 1887; Mathematische Annalen Bd. 35; 1889.

3) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 88 II, p. 975—1003; 1883.

4) Quarterly Journal of Mathematics Bd. 23; 1888.

5) Serie di Fourier Bd. I, p. 246—269, Pisa 1880.

muß, als Funktion von t betrachtet, endlich oder mindestens, absolut genommen, integrabel sein.

6) Wenn x einen innern Punkt des Intervalles $(0, 1)$ bedeutet, wird die Summe der so gebildeten Reihe (3) gleich $f(x)$ oder $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$, je nachdem $f(x)$ im Punkte x kontinuierlich ist oder nicht; im Punkte $x=1$ wird die Summe dagegen immer gleich Null.

Dini hat noch andere Reihenentwicklungen nach Cylinderfunktionen angegeben; bedeuten nämlich $\alpha_n^{\nu+1}$ die Wurzeln derjenigen Gleichung, welche man aus (2) erhält, wenn man $\nu+1$ für ν setzt, so erhält man folgende Entwicklung:

$$(5)\qquad f(x) = (2\nu+2)\cdot\int_0^1 f(x)\,x^{2\nu+1}\,dx + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s' J^\nu(\alpha_s^{\nu+1}x)$$

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$(6)\qquad a_n' = \frac{1}{(J^\nu(\alpha_n^{\nu+1}))^2}\cdot\int_0^1 x f(x)\,J^\nu(\alpha_n^{\nu+1}x)\,dx.$$

Bedeutet nun h eine willkürliche, von Null verschiedene reelle Konstante und sind $\beta_1^\nu, \beta_2^\nu, \beta_3^\nu, \ldots$ die reellen Wurzeln folgender anderen transcendenten Gleichung:

$$(7)\qquad xJ^{\nu+1}(x) + h\cdot J^\nu(x) = 0,$$

so gelangt Dini schließlich zu folgender Entwicklung:

$$(8)\qquad f(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s'' J^\nu(\beta_s^\nu x)$$

mit der Koeffizientenbestimmung:

$$(9)\qquad a_n'' = \frac{2}{\big(h(2\nu+h)+(\beta_n^\nu)^2\big)\,(J^\nu(\beta_n^\nu))^2}\cdot\int_0^1 xf(x)J^\nu(\beta_n^\nu x)dx;$$

für beide Entwicklungen gilt der Satz:

II. *Die Entwicklungen* (5) *und* (8) *sind unter den oben angegebenen Bedingungen im Intervalle* $(0, 1)$ *anwendbar, denn diese Reihen haben für* $x=1$ *die Summe* $f(1-0)$.

Die Entwicklung (8) ist des Parameters h wegen sehr allgemein. Setzt man zum Beispiel $h=-2\nu$, so reduziert sich (7) auf die Gleichung:

$$-x\cdot J^{\nu-1}(x) = 0,$$

und man findet somit $\beta_n^{\nu} = \alpha_n^{\nu-1}$, also aus (8) die speziellere Entwicklung:

(10) $$f(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s''' J^{\nu}(\alpha_s^{\nu-1} x)$$

mit der Koeffizientenbestimmung:

(11) $$a_n''' = \frac{2}{(\alpha_n^{\nu-1})^2 (J^{\nu}(\alpha_n^{\nu-1}))^2} \cdot \int_0^1 x f(x) J^{\nu}(\alpha_n^{\nu-1})\, dx.$$

Die Reihe (10) hat also nach dem zweiten Dinischen Satze für $x = 1$ die Summe $f(1-0)$, eine Bemerkung, die uns bald sehr nützlich sein wird.

Wir bemerken noch, daß die Koeffizientenbestimmungen (4), (6), (9), (11) offenbar in sehr naher Verbindung mit unseren in Kapitel IV gegebenen Untersuchungen stehen. Betrachten wir nämlich die lineare, nicht homogene Gleichung:

$$y^{(2)} + \frac{1}{x} y^{(1)} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = f(ax),$$

wo a eine endliche Konstante bedeutet, und bezeichnen wir mit $B^{\nu}(a, x)$ ein Integral dieser Gleichung, so erhalten wir aus § 27, (7):

(12) $$\int_0^1 x f(x) J^{\nu}(\alpha_n^{\nu} x)\, dx = \frac{1}{\alpha_n^{\nu}} \cdot J^{\nu+1}(\alpha_n^{\nu}) B^{\nu}\left(\frac{1}{\alpha_n^{\nu}}, \alpha_n^{\nu}\right),$$

vorausgesetzt allerdings, daß:

$$\lim_{x=0} \left[x J^{\nu}(\alpha_n^{\nu} x) D_x B^{\nu}\left(\frac{1}{\alpha_n^{\nu}}, \alpha_n^{\nu} x\right)\right] = 0$$

ist; die Formel (4) liefert dann für a_n unmittelbar den Ausdruck:

(13) $$a_n = \frac{2}{\alpha_n^{\nu} J^{\nu+1}(\alpha_n^{\nu})} \cdot B^{\nu}\left(\frac{1}{\alpha_n^{\nu}}, \alpha_n^{\nu}\right);$$

es ist klar, daß wir die drei andern Koeffizienten in ähnlicher Weise ausdrücken können.

§ 136. **Entwicklung von $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$. Die Produktdarstellung von $J^{\nu}(x)$.**

Als Beispiel für die allgemeinen Dinischen Entwicklungen setzen wir:

$$f(x) = \Pi^{\nu,\varrho}(tx),$$

wo t eine willkürliche endliche reelle Größe bedeutet, so daß wir:

$$\nu > \tfrac{1}{2}, \quad \Re(\varrho) > \nu - 2$$

oder:

$$-\tfrac{1}{2} < \nu < +\tfrac{1}{2}, \quad \Re(\varrho) > -\tfrac{5}{2}$$

voraussetzen müssen. Die Integralformel § 34, (20) führt uns unmittelbar zu folgender Entwicklung:

$$(1)\qquad \Pi^{\nu,\varrho}(tx) = 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\alpha_s^{\nu})^{\varrho}\Pi^{\nu,\varrho}(t) - t^{\varrho}\Pi^{\nu,\varrho}(\alpha_s^{\nu})}{(\alpha_s^{\nu})^{\varrho-1}((\alpha_s^{\nu})^2 - t^2)J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})} \cdot J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x),$$

aus welcher eine große Menge anderer Formeln entwickelt werden kann. Durch Spezialisierungen des Parameters ϱ gewinnt man z. B. die drei neuen Entwicklungen:

$$(2)\qquad \Pi^{\nu}(tx) = 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha_s^{\nu}\Pi^{\nu}(t) - \alpha_s^{\nu}\Pi^{\nu}(\alpha_s^{\nu})}{((\alpha_s^{\nu})^2 - t^2)J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})} \cdot J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x),$$

$$(3)\qquad X^{\nu}(tx) = 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\alpha_s^{\nu}X^{\nu}(t) - tX^{\nu}(\alpha_s^{\nu})}{((\alpha_s^{\nu})^2 - t^2)J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})} \cdot J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x),$$

$$(4)\qquad Z^{\nu}(tx) = 2\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(\alpha_s^{\nu})^{\nu+1}Z^{\nu}(t) - t^{\nu+1}Z^{\nu}(\alpha_s^{\nu})}{(\alpha_s^{\nu})^{\nu}((\alpha_s^{\nu})^2 - t^2)J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})} \cdot J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x).$$

Dividiert man ferner in (1) mit t^{ν}, so erhält man für $t = 0$ nach einer Anwendung der Rekursionsformel § 29, (3) folgende andere spezielle Entwicklung:

$$(5)\qquad \frac{x^{\varrho}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\left(\nu-\varrho\right)}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+1\right)} = \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{2}{\alpha_s^{\nu}}\right)^{\varrho+1}\cdot\frac{\Pi^{\nu,\varrho+2}(\alpha_s^{\nu})}{J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})}\cdot J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x),$$

welche man ja mittelst § 33, (7) auch direkt herleiten kann; für $\varrho = \nu$ ergibt sich weiter aus (5) wegen § 29, (3) folgende bemerkenswerte Formel:

$$(6)\qquad x^{\nu} = 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\alpha_s^{\nu}}\cdot\frac{J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x)}{J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})},$$

während die Annahme $\varrho = 0$ des weitern:

$$(7)\qquad 1 = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2}{\alpha_s^{\nu}J^{\nu+1}(\alpha_s^{\nu})}\cdot\left(1 - \frac{\pi\nu}{\sin\nu\pi}\Pi^{\nu}(\alpha_s^{\nu})\right)J^{\nu}(\alpha_s^{\nu}x)$$

ergibt; daraus erhalten wir mittelst § 17, (25), (26) die spezielleren Formeln:

$$(8)\qquad 1 = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2}{\alpha_s^{2n}J^{2n+1}(\alpha_s^{2n})}\left(1 + nT^{2n}(\alpha_s^{2n})\right)J^{2n}(\alpha_s^{2n}x),\quad n \geqq 0,$$

$$(9)\qquad \begin{cases} 1 = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2}{\alpha_s^{2n}J^{2n}(\alpha_s^{2n-1})}\left(1 + \pi(n-\frac{1}{2})\,\Omega^{2n-1}(\alpha_s^{2n-1})\right)J^{2n-1}(\alpha_s^{2n-1}x), \\ \qquad\qquad n \geqq 1, \end{cases}$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet; für $n = 0$ gibt (8) ferner die merkwürdige Formel:

$$(10) \qquad 1 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2}{\alpha_s^0 J^1(\alpha_s^0)} \cdot J^0(\alpha_s^0 x).$$

Diese Fourierschen Reihen nach Cylinderfunktionen erlauben also Konstantenentwicklungen, welche in dem ganzen Intervalle $0 \leqq x < 1$ *dieselbe Konstante darstellen. Da die allgemeine Reihe* § 135, (3) *aber kein konstantes Glied enthält, können diese Konstantenentwicklungen nicht die unendliche Vieldeutigkeit der Reihe* (3) *mit sich führen.*

Wir bemerken noch, daß die Formel (5) durch Differentiation nach ϱ und dann für $\varrho = 0$ eine Entwicklung für den Logarithmus liefert; die so erhaltene Formel wird indessen so kompliziert, daß wir es bei dieser Andeutung bleiben lassen, um wieder zu der allgemeineren Formel (1) zurückzukehren. Setzen wir in dieser Formel $\varrho = \nu$, so erhalten wir durch Anwendung von (6) folgende weitere Entwicklung:

$$(11) \qquad \frac{x^{-\nu} J^\nu(tx)}{J^\nu(t)} - 1 = 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{t^2}{\alpha_s^\nu((\alpha_s^\nu)^2 - t^2)} \cdot \frac{x^{-\nu} J^\nu(\alpha_s^\nu x)}{J^{\nu+1}(\alpha_s^\nu)};$$

nun ist die Reihe rechter Hand in dieser Formel, als Funktion von x betrachtet, offenbar gliedweise differentiierbar, weil sie unbedingt konvergent ist; die gliedweise Differentiation nach x führt indessen mittelst § 10, (5) zu der neuen Formel:

$$(12) \qquad \frac{J^{\nu+1}(tx)}{J^\nu(t)} = 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{t}{(\alpha_s^\nu)^2 - t^2} \cdot \frac{J^{\nu+1}(\alpha_s^\nu x)}{J^{\nu+1}(\alpha_s^\nu)}.$$

Die so erhaltene Entwicklung ist nun genau von derselben Form wie § 135, (10) und kann natürlich auch mittelst der allgemeinen Methode hergeleitet werden. Es ist also allerdings erlaubt, in (12) $x = 1$ zu setzen; führt man darauf wieder x statt t ein, so findet man, daß:

$$(13) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2x}{(\alpha_s^\nu)^2 - x^2} = \frac{J^{\nu+1}(x)}{J^\nu(x)} = \frac{\nu}{x} - D_x \log J^\nu(x)$$

ist, und hieraus erhält man unmittelbar die Produktdarstellung von $J^\nu(x)$. Diese Darstellung ist ja gewiß nur für ein reelles ν bewiesen, das größer als -1 ist, während $0 \leqq x \leqq 1$ sein muß; sie muß aber allgemein gültig sein, weil sowohl das unendliche Produkt

als auch $J^\nu(x)$ durch $x^{-\nu}$ multipliziert für alle endlichen Wertepaare von x und ν ganze transcendente Funktionen dieser Variabeln darstellen.

Sicher hat Hankel[1]) zuerst ein solches Beweisverfahren für die Produktdarstellung versucht; später hat Beltrami[2]) die speziellen Fälle $\nu = 0$, $\nu = 1$ erörtert, während neuerdings Graf[3]) auf den allgemeinen Fall zurückgekommen ist. Diese Beweise sind indessen nicht genau, weil der Übergang von (12) nach (13) erst infolge des zweiten Satzes von Dini als legitim angesehen werden darf.

§ 137. Reziproke Potenzsummen der Wurzeln α_n^ν nach Graf.

Um die Analogie zwischen den Kreis- und den Cylinderfunktionen noch weiterzuführen, wollen wir kurz andeuten, was wir hier unter den Bernoullischen Zahlen zu verstehen haben. Zu dem Ende gehen wir von der Produktdarstellung:

$$(1) \qquad J^\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha_s^\nu}\right)^2\right)$$

aus, welche sich auch als unmittelbare Folge des allgemeinen Satzes von Hadamard[4]) darbietet. Die logarithmische Differentiation von (1) führt, wie man sieht, unmittelbar zu § 136, (13) zurück. Wir setzen nun der Kürze halber:

$$(2) \qquad S_{2n}^\nu = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(\alpha_s^\nu)^{2n}},$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, und finden so aus § 136, (13), falls $|x| < |\alpha_1^\nu|$ vorausgesetzt wird, folgende Formel:

$$(3) \qquad S_2^\nu x + S_4^\nu x^3 + S_6^\nu x^5 + \cdots = \frac{J^{\nu+1}(x)}{2 J^\nu(x)}.$$

Für $\nu = 0$ hat Euler[5]) versucht, die Funktion rechter Hand nach steigenden Potenzen von x zu entwickeln; später ist Jacobi[6])

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 494; 1875.

2) Rendiconti dell' Istituto Lombardo (2) Bd. 13, p. 336; 1880.

3) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen Heft I, p. 130; Bern 1898.

4) Journal de Mathématiques (4) Bd. 9, p. 209; 1893.

5) Acta Academiae Petropolitanae 1781, p. 172, 173.

6) Journal für Mathematik Bd. 15, p. 26; 1836. Astronomische Nachrichten Bd. 28, col. 93—94; 1849.

zweimal auf die allgemeinere Aufgabe, in welcher ν eine ganze Zahl bedeutet, zurückgekommen; er hat die ersten Glieder einer solchen Entwicklung angegeben. Wie aus Formel (3) deutlich hervorgeht, fällt das Problem mit dem folgenden zusammen: die Summen der reziproken Potenzen S^{ν}_{2n} der Nullstellen α_s^{ν} als Funktion von ν zu bestimmen.

Multipliziert man in (3) mit $J^{\nu}(x)$ und entwickelt man die beiden Seiten der so erhaltenen Formel nach steigenden Potenzen von x, so erhält man für die successive Bestimmung der Summen S^{ν}_{2n} leicht folgende Rekursionsformel:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{2^{2p} S^{\nu}_{2p}}{\Gamma(\nu+n-p+1)} = \frac{1}{(n-1)!\,\Gamma(\nu+n+1)}, \tag{4}$$

eine Formel, die nichts anderes ist als ein Analogon zur Newtonschen Formel für die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Durch vollständige Induktion ergibt sich nun aus (4) der allgemeine Satz:

Wenn ν eine willkürliche, endliche Größe bedeutet, die jedoch nicht eine ganze negative Zahl sein darf, ist die Summe S^{ν}_{2n} immer eine rationale Funktion von ν, und das überdies mit lauter rationalen Koeffizienten.

Es ist hier wohl zu beachten, daß wir von den Summen:

$$S^{\nu}_{2n+1} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(\alpha_s^{\nu})^{2n+1}}, \tag{5}$$

in denen n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, im Grunde nichts wissen. Dasselbe gilt übrigens für die Summen:

$$s_{2n+1} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^{2n+1}}, \tag{6}$$

über deren Natur noch gar nichts bekannt ist; es ist ja auch wohlbekannt, daß man sogar noch bei den elliptischen Funktionen ähnlichen Verhältnissen begegnet.[1])

Der allgemeine Ausdruck für S^{ν}_{2n} scheint allerdings äußerst kompliziert zu sein; für kleinere Werte von n findet man indessen ohne Mühe folgende Formeln:

1) Man vergleiche Tannery und Molk: Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, Bd. I, p. 176; Paris 1893.

$$S_2^\nu = \frac{2^{-2}}{\nu + 1},$$

$$S_4^\nu = \frac{2^{-4}}{(\nu + 1)^2 (\nu + 2)},$$

$$S_6^\nu = \frac{2^{-6} \cdot 2}{(\nu + 1)^3 (\nu + 2)(\nu + 3)},$$

$$S_8^\nu = \frac{2^{-8}(5\nu + 11)}{(\nu + 1)^4 (\nu + 2)^2 (\nu + 3)(\nu + 4)},$$

$$S_{10}^\nu = \frac{2^{-10}(14\nu + 38)}{(\nu + 1)^5 (\nu + 2)^2 (\nu + 3)(\nu + 4)(\nu + 5)},$$

welche zuerst von Graf[1]) aufgestellt worden sind; wie Graf bemerkt, findet man hieraus für $\nu = \frac{1}{2}$ die fünf ersten Bernoullischen Zahlen.

Kapitel XXVII.

Integraldarstellungen nach Neumann und Hankel.

§ 138. Das dreifache Integral von Neumann.

Bekanntlich hat zur Darstellung der „willkürlichen“ Funktion $f(x)$ einer reellen Variabeln zuerst Fourier[2]) folgende allgemeine Integralformel:

$$(1) \qquad \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos z(y - x)\, dy = \pi f(x)$$

angegeben, während Hamilton[3]) später aufs neue und, ohne die Arbeit Fouriers zu kennen, dieselbe Formel hergeleitet hat.

Fourier[4]) hat ähnliche Darstellungen und zwar durch ein vierfaches Integral auch für eine Funktion zweier reellen Variabeln angegeben. Beide Darstellungen sind von du Bois Reymond[5]) streng bewiesen und wesentlich verallgemeinert worden.

---

1) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Heft I, p. 190; Bern 1898.

2) Citat von du Bois Reymond: Journal für Mathematik Bd. 69, p. 65; 1869.

3) Transactions of the Royal Irish Academy Bd. 19 II; 1843.

4) Citat von du Bois Reymond: Mathematische Annalen Bd. 4, p. 367; 1871.

5) Mathematische Annalen Bd. 4.

Hamilton[1]) hat als Analogon der Formel (1) eine ähnliche Integraldarstellung angegeben, in welcher die Kreisfunktion durch eine spezielle Cylinderfunktion ersetzt ist, eine Formel, welche Hankel[2]) später, offenbar ohne die Arbeit Hamiltons zu kennen, verallgemeinert hat.

Als Analogon des vierfachen Fourierschen Integrales mit Kreisfunktionen kann man ein dreifaches Integral von Neumann[3]) mit der Cylinderfunktion $J^0(x)$ ansehen; diese Neumannsche Formel ist dann in aller Strenge auch von du Bois Reymond[4]) bewiesen worden, während die späteren Beweise von Mehler[5]) und Ermakoff[6]) nicht genau sind.

Hier wollen wir die Neumannsche Formel in ihrer möglichst allgemeinen Gestalt herleiten, indem wir von folgendem allgemeinen Satze du Bois Reymonds[7]) ausgehen:

Falls die Funktion $f(r, v)$ der zwei reellen und unabhängigen Variabeln r und v so beschaffen ist, daß das zweifache Integral:

$$\int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(r, v)\,dv \tag{2}$$

unbedingt konvergiert, und falls $\varphi(x)$ eine solche Funktion bedeutet, daß das einfache Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx, \qquad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx \tag{3}$$

einen Sinn hat, dann gilt die allgemeine Formel:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty z\,dz \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(r, v)\,\varphi\Big(z^2(r^2 + \varrho^2 - 2r\varphi\cos(v-\theta)\Big)\,dv = \\ &\qquad\qquad = \frac{\pi}{2} f(\varrho, \theta) \cdot \int_0^\infty \frac{\Phi(x)}{x}\,dx \cdot \end{aligned}\right. \tag{4}$$

1) loc. cit. p. 309.

2) Mathematische Annalen Bd. 8; 1875.

3) Allgemeine Lösung des Problems über den stationärën Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, p. 149; Halle 1862.

4) Mathematische Annalen Bd. 4, p. 390; 1871.

5) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 135—140; 1872.

6) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 639—640; 1872.

7) loc. cit. p. 386.

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir vor allem die Funktion $\varphi(x)$ als passende Cylinderfunktion bestimmen; wir setzen daher zunächst:

$$(5) \qquad \varphi(x) = x^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot C^{\nu-1}(\sqrt{x})$$

und finden so mittelst § 10, (4) für $\Phi(x)$ den Ausdruck:

$$(6) \qquad \Phi(x) = 2x^{\frac{\nu}{2}} \cdot C^{\nu}(\sqrt{x}), \qquad \Re(\nu) > 0;$$

das Integral (3) läßt sich also mittelst des Weberschen Fundamentalintegrales in § 72 herleiten, hat aber nur einen Sinn, wenn die Cylinderfunktion von der ersten Art ist und wenn zudem:

$$(7) \qquad 0 < \Re(\nu) < \tfrac{3}{2}$$

vorausgesetzt wird. In diesem Falle findet man durch die Substitution $x = z^2$ und unter Anwendung von § 72, (2) unschwer:

$$(8) \qquad \int_0^\infty x^{\frac{\nu-2}{2}} \cdot J^{\nu}(\sqrt{x})dx = 2\int_0^\infty z^{\nu-1}J^{\nu}(z)dt = \frac{2^{\nu+1}}{\Gamma(\nu)};$$

daraus ergibt sich folgende erste allgemeine Darstellung:

$$(9) \quad f(\varrho, \theta) = \frac{2^{-\nu}}{\pi\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_0^\infty z dz \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} f(r, v)\, (z\Omega)^{\nu-1} J^{\nu-1}(z\Omega) dv,$$

wo wir der Kürze halber:

$$(10) \qquad \Omega = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(v - \theta)}$$

gesetzt haben, und wo die Bedingung (7) erfüllt sein muß.

Für $\nu = 1$ erhält man aus (9) die obenerwähnte Formel von Neumann.

Die Annahme:

$$(11) \qquad \varphi(x) = x^{-\frac{\nu-1}{2}} \cdot C^{\nu-1}(\sqrt{x})$$

scheitert für alle Cylinderfunktionen daran, daß das entsprechende Integral (3) immer divergieren muß.

Weiter setzen wir:

$$(12) \qquad \varphi(x) = x^{\nu} \cdot C^{\nu-1}(x)$$

und finden so mittelst der allgemeinen Differentialformel § 10, (2):

$$(13) \qquad \Phi(x) = x^{\nu} \cdot C^{\nu}(x), \qquad \Re(\nu) > 0;$$

das zugehörige Integral (3) kann auch hier nur konvergieren, falls die Cylinderfunktion von der ersten Art und falls außerdem:

$$(14) \qquad 0 < \Re(\nu) < \tfrac{3}{2}$$

vorausgesetzt wird. Die Webersche Fundamentalformel führt dann ohne Mühe zu folgender andern allgemeinen Integraldarstellung:

$$(15) \quad f(\varrho, \theta) = \frac{2^{2-\nu}}{\pi \Gamma(\nu)} \cdot \int_0^\infty z\,dz \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} f(r, v)\,(z\Omega)^{2\nu} J^{\nu-1}(z^2\Omega^2)\,dv;$$

setzt man hier $\nu = \frac{1}{2}$, so erhält man eine Formel von du Bois Reymond.[1])

Die Annahme:

$$(16) \qquad \varphi(x) = x^{-\nu} \cdot C^{\nu-1}(x)$$

ist gleichfalls für alle Cylinderfunktionen unzulässig, weil das Integral (3) auch hier immer divergieren muß.

Die Formeln (9) und (15) stellen so die überhaupt durch (4) möglichen Verallgemeinerungen der Neumannschen Formel dar; die Ergebnisse sind ohne Beweis und ohne diesen Hinweis von Gegenbauer[2]) veröffentlicht worden.

Setzt man in der Neumannschen Formel (9) für $\nu = 1$ die Funktion $f(r, v)$ als von v unabhängig voraus, so findet man mittelst der Gegenbauerschen Integralformel § 69, (7) für $\nu = 0$ die bemerkenswerte Identität:

$$(17) \qquad f(\varrho) = \int_0^\infty z\,dz\,J^0(\varrho z) \int_0^\infty r\,dr\,J^0(rz) f(r),$$

welche nichts andres ist als ein Spezialfall des merkwürdigen Hankelschen Umkehrproblems. Die allgemeine Lösung dieses Problems scheint indessen unter ausschließlicher Anwendung der verallgemeinerten Neumannschen Formel (9) nicht möglich, so daß wir einen andern Weg zu gehen haben, indem wir uns ziemlich nahe an Hankel selbst halten.

---

1) Mathematische Annalen Bd. 4, p. 388; 1871.

2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 95 II, p, 409—410; 1887.

§ 139. Herleitung einiger Grenzwerte.

Um das am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen erwähnte Hankelsche Umkehrproblem in seiner vollsten Allgemeinheit zu lösen, betrachten wir mit Hankel[1]) folgendes bestimmte Integral:

$$\Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) = \int_0^\omega t C^\nu(t\alpha) C_1^\nu(t\beta) dt, \tag{1}$$

wo im allgemeinen $1 > \Re(\nu) > -1$ vorauszusetzen ist und wo wir außerdem α, β und ω als positiv annehmen. Setzen wir:

$$C^\nu(x) = aJ^\nu(x) + b\,Y^\nu(x), \quad C_1^\nu(x) = a_1 J^\nu(x) + b_1 Y^\nu(x), \tag{2}$$

so erhalten wir aus § 28, (6) nach einer einfachen Umformung für die Funktion Ψ den Ausdruck:

$$\begin{cases} \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) = \\ = \frac{\omega}{\alpha^2 - \beta^2}\left(\alpha C^{\nu+1}(\alpha\omega) C_1^\nu(\beta\omega) - \beta C^\nu(\alpha\omega) C_1^{\nu+1}(\beta\omega)\right) + F^\nu(\alpha, \beta), \end{cases} \tag{3}$$

wo wir der Kürze halber:

$$\begin{cases} F^\nu(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)}\left(ab_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu - a_1 b\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}\right) - \\ \qquad - \frac{2bb_1 \cos\nu\pi}{\pi(\alpha^2 - \beta^2)\sin\nu\pi}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}\right) \end{cases} \tag{4}$$

gesetzt haben; diese Funktion ist also von ω ganz unabhängig.

Es seien nun weiter p und q zwei reelle, nicht negative Größen und $q > p$; wir suchen dann folgenden Grenzwert zu bestimmen:

$$\lim_{\omega = +\infty} \int_p^q \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha. \tag{5}$$

Falls $p > 0$ angenommen wird, ist es erlaubt, in (3) für die dort vorkommenden Cylinderfunktionen die in § 59 gefundenen asymptotischen Ausdrücke einzuführen; wir setzen also:

$$C_1^\nu(\beta\omega) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\omega}}\left(a_1 \cos\left(\beta\omega - (\nu + \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - b_1 \sin\left(\beta\omega - (\nu + \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$C^{\nu+1}(\alpha\omega) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\omega}}\left(a \sin\left(\alpha\omega - (\nu + \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + b \cos\left(\alpha\omega - (\nu + \tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 476; 1875.

und gewinnen so nach einer einfachen Rechnung aus (3) für Ψ folgenden Ausdruck:

$$\pi \cdot \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega) \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \Big((aa_1 + bb_1) \frac{\sin(\alpha - \beta)\omega}{(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha}} +$$

$$+ (ab_1 - a_1 b) \frac{\cos(\alpha - \beta)\omega}{(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha}} - (aa_1 - bb_1) \frac{\cos((\alpha + \beta)\omega - \nu\pi)}{(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha}} +$$

$$+ (ab_1 + a_1 b) \frac{\sin((\alpha + \beta)\omega - \nu\pi)}{(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha}} \Big) + F^{\nu}(\alpha, \beta),$$

so daß die Bestimmung des Grenzwertes (5) auf die Ermittlung von:

$$(6) \qquad \lim_{\omega = +\infty} \int_p^q \frac{\sin(\alpha - \beta)\omega}{(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha}} d\alpha$$

und von drei anderen Integralen hinausläuft, welche indessen nach den Formeln (T_3) und (T_4) von Dirichlet sämtlich gleich Null sein müssen. Um den Grenzwert (6) zu bestimmen, setzen wir $\omega(\alpha - \beta) = \xi$ und finden so:

$$\lim_{\omega = +\infty} \int_p^q \frac{\sin(\alpha - \beta)\omega}{(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha}} d\alpha = \lim_{\omega = +\infty} \int_{(p-\beta)\omega}^{(q-\beta)\omega} \frac{\sin \xi}{\xi \sqrt{\beta + \frac{\xi}{\omega}}} d\xi,$$

so daß dieser Grenzwert gemäß (T_3) im allgemeinen gleich $\pi : \sqrt{\beta}$ oder gleich Null sein muß, je nachdem $p < \beta < q$ oder $p > \beta$ oder $q < \beta$ vorausgesetzt wird; fällt speziell β mit p oder q zusammen, so wird der Grenzwert dagegen $\pi : 2\sqrt{\beta}$.

Dieses Ergebnis läßt sich auch noch aufrecht erhalten, wenn die untere Grenze p des Integrales (5) dem Werte Null zustrebt; denn die asymptotischen Ausdrücke für die Cylinderfunktionen bleiben ja noch anwendbar, falls man p gegen die Null konvergieren und ω ohne Grenze wachsen läßt, wenn nur das Produkt $\omega \cdot p$ gleichzeitig mit ω unbegrenzt wächst.

Wir haben damit folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

Wenn $q > \beta > p$ ist und $p \geqq 0$ vorausgesetzt wird, ist immer:

$$(7) \qquad \lim_{\omega = +\infty} \int_p^q \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega) d\alpha = \frac{aa_1 + bb_1}{\beta} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_p^q F^{\nu}(\alpha, \beta) d\alpha;$$

wenn dagegen $\beta > q$ oder $p > \beta$ ist, finden wir den Grenzwert:

(8) $$\lim_{\omega=+\infty} \int_p^q \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha = \frac{1}{\pi} \cdot \int_p^q F^\nu(\alpha, \beta)\, d\alpha;$$

wenn endlich β mit einer der Grenzen p oder q zusammenfällt, ist:

(9) $$\lim_{\omega=+\infty} \int_p^q \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha = \frac{a a_1 + b b_1}{2\beta} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_p^q F^\nu(\alpha, \beta)\, d\alpha,$$

wo wir demnach immer $\beta > 0$ annehmen müssen.

Zwei verschiedene spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes verdienen besonders hervorgehoben zu werden.

Der erste Fall tritt bei den Hankelschen Cylinderfunktionen $H_1^\nu(x)$ und $H_2^\nu(x)$ ein; denn für sie verschwindet der Ausdruck $a a_1 + b b_1$ immer, so daß, wenn:

$$C^\nu(x) = C_1^\nu(x) = H_1^\nu(x) \quad \text{oder} \quad C^\nu(x) = C_1^\nu(x) = H_2^\nu(x)$$

ist, die Formeln (7) und (9) mit (8) identisch werden müssen.

Der zweite Fall tritt nur bei der Annahme:

$$C_1^\nu(x) = C^\nu(x) = J^\nu(x)$$

ein; denn dann und nur dann verschwindet die Funktion $F^\nu(\alpha, \beta)$, so daß der zugehörige Grenzwert (5) sowohl von p als von q unabhängig wird, eine Eigenschaft, die diesen speziellen Fall vor allen andern besonders auszeichnet, so daß wir ihn in dem folgenden Paragraphen ausschließlich betrachten wollen.

§ 140. Das Hankelsche Umkehrproblem.

Wir betrachten nunmehr eine Funktion $f(x)$, welche in dem Intervalle $p \leqq x \leqq q$ willkürlich gegeben ist, jedoch so, daß sie in diesem Intervalle nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt und außerdem abteilungsweise stetig und kontinuierlich ist und zwar so, daß das Integral:

(1) $$\int_p^q x f(x)\, dx$$

unbedingt konvergiert. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir das Integral:

(2) $$\int_p^q \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha,$$

wo also die beiden auftretenden Cylinderfunktionen von der ersten Art sein sollen.

Vorläufig setzen wir voraus, daß $\alpha f(\alpha)$ im ganzen Integrationsintervalle entweder immer zu- oder abnimmt, und erhalten somit aus dem bekannten Mittelwertsatze[1]):

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_p^q \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) d\alpha = \\ &= p f(p) \int_p^q \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) d\alpha + \big(q f(q) - p f(p)\big) \int_c^q \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) d\alpha, \end{aligned} \right.$$

wo $p < c \leqq q$ vorauszusetzen ist. In dem Falle $\beta < p$ oder $\beta > q$ gewinnen wir so aus dem Satze des vorigen Paragraphen folgendes Ergebnis:

$$(4)\qquad \lim_{\omega = +\infty} \int_p^q \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega) d\alpha = 0.$$

Weiter ergibt der Mittelwertsatz:

$$\int_\beta^p \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha =$$
$$= \beta f(\beta) \int_\beta^p \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha + \big(p f(p) - \beta f(\beta)\big) \int_{c'}^p \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha,$$

wo also $\beta \leqq c' \leqq p$ zu nehmen ist; also findet man aus § 139, (9):

$$\lim_{\omega = +\infty} \int_\beta^p \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha =$$
$$= \tfrac{1}{2} f(\beta) + \lim_{\omega = +\infty} \big(p f(p) - \beta f(\beta)\big) \int_{c'}^p \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha;$$

daraus folgt nach Addition von (4):

$$\lim_{\omega = +\infty} \int_\beta^q \alpha f(\alpha) \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha =$$
$$= \tfrac{1}{2} f(\beta) + \lim_{\omega = +\infty} \big(p f(p) - \beta f(\beta)\big) \int_{c'}^p \Psi^\nu(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha$$

---

1) du Bois Reymond, im Journal für Math. Bd. 69, p. 82.

und sonach mittelst § 139, (7), (8):

$$\lim_{\omega=+\infty} \int_{\beta}^{q} \alpha f(\alpha) \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega) d\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} f(\beta), & c' > \beta, \\ \frac{1}{2} f(\beta) + \frac{1}{2\beta}\Big(pf(p) - \beta f(\beta)\Big), & c' = \beta. \end{cases}$$

Nun ist das Integral linker Hand offenbar von dem Mittelwerte p ganz unabhängig; folglich ist die Annahme $c' = \beta$ unzulässig, so daß wir schließlich zu dem Ergebnis gelangen:

$$(5) \qquad \lim_{\omega=+\infty} \int_{\beta}^{q} \alpha f(\alpha) \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha = \tfrac{1}{2} f(\beta).$$

Ganz auf dieselbe Weise finden wir das ähnliche Resultat:

$$(6) \qquad \lim_{\omega=+\infty} \int_{p}^{\beta} \alpha f(\alpha) \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha = \tfrac{1}{2} f(\beta);$$

also erhalten wir durch Addition von (5) und (6) die allgemeine Formel:

$$(7) \qquad \lim_{\omega=+\infty} \int_{p}^{q} \alpha f(\alpha) \Psi^{\nu}(\alpha, \beta, \omega)\, d\alpha = \begin{cases} f(\beta), \\ \tfrac{1}{2} f(\beta), \\ 0, \end{cases}$$

je nachdem β zwischen die Grenzen p und q fällt, mit einer dieser Grenzen selbst zusammenfällt oder überhaupt nicht auf dem Intervall (p, q) liegt.

Denkt man sich nun das Intervall (p, q) in mehrere andre zerlegt, so daß in jedem dieser neuen Intervalle $\alpha f(\alpha)$ entweder immer zu- oder abnimmt, so leuchtet ein, daß das Ergebnis (7) noch richtig bleibt. Ist β eine Sprungstelle zwischen p und q, so hat das Integral natürlich den Wert $\frac{1}{2}\Big(f(\beta + 0) + f(\beta - 0)\Big)$.

Wir haben ferner den speziellen Fall $\beta = 0$ zu untersuchen; ist $\Re(\nu) > 0$, so verschwindet die Funktion Ψ offenbar, während die Annahme $-1 < \Re(\nu) < 0$ dieselbe Funktion unendlich macht. Wir haben also nur den Fall $\Re(\nu) = 0$ zu betrachten; ist die imaginäre Komponente von ν nicht auch gleich Null, so wird Ψ im allgemeinen ganz und gar unbestimmt, so daß uns nur die Annahme $\nu = 0$ übrig bleibt. Wir finden in diesem Falle:

$$\Psi^{0}(\alpha, 0, \omega) = \frac{\omega}{\alpha} \cdot J^{1}(\alpha\omega),$$

woraus sich mittelst § 10, (4):

$$\int_p^q \Psi^0(\alpha, 0, \omega)\, d\alpha = \omega \int_p^q \frac{J^1(\alpha\omega)}{\alpha}\, d\alpha = \left(J^0(p\omega) - J^0(q\omega)\right)$$

ergibt; dieselbe Methode wie vorher liefert dann folgendes Resultat

$$\lim_{\omega=+\infty} \int_p^q \alpha f(\alpha) \Psi^0(\alpha, 0, \omega)\, d\alpha = \begin{cases} 0, & p > 0, \\ f(0), & p = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Bemerken wir weiter, daß uns die Annahme über die unbedingte Konvergenz des Integrales (1) gestattet, in dem Doppelintegrale:

$$\int_p^q \alpha f(\alpha) \left(\int_0^\infty \beta J^\nu(\alpha\beta) J^\nu(\beta\alpha)\, d\beta \right) d\alpha$$

die Integrationsfolge umzukehren, so haben wir folgenden allgemeinen Satz bewiesen:

Falls $\Re(\nu) > -1$ *ist und* $f(x)$ *den oben gestellten Bedingungen genügt, ist:*

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \beta J^\nu(\beta x) \left(\int_p^q \alpha f(\alpha) J^\nu(\alpha\beta)\, d\alpha \right) d\beta = \\ &\qquad = \begin{cases} f(x), & q > x > p \geqq 0, \\ \frac{1}{2} f(x), & x = q \text{ oder } x = p > 0, \\ 0, & x > q \text{ oder } x < p; \end{cases} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

in dem speziellen Falle $x = 0$ *ist* (9) *nur für* $\nu = 0$ *anwendbar.*

Ist es erlaubt, $p = 0$, $q = \infty$ anzunehmen, so ergibt sich aus (9) für $x > 0$ die merkwürdige Umkehrformel von Hankel[1]), die sich in folgendem Satze ausdrücken läßt:

Setzt man:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \alpha f(\alpha) J^\nu(\alpha x)\, d\alpha, \tag{10}$$

so ist auch umgekehrt:

---

1) Mathematische Annalen Bd. 8, p. 482; 1875.

$$f(x) = \int_0^\infty \alpha \varphi(\alpha) J^\nu(\alpha x) d\alpha; \tag{11}$$

diese Formeln sind also nur für die Cylinderfunktion der ersten Art anwendbar.

Dieser merkwürdige Satz ist später, aber nicht streng, von Sonin[1]) hergeleitet worden; der große russische Mathematiker hat aber eben durch diesen Satz viele seiner interessanten bestimmten Integrale gefunden.

1) Mathematische Annalen, Bd. 16, p. 47; 1880.

Anhang. — Hilfsformeln und Zusätze.

A. Die Gammafunktion[1].

Gauß[2] hat zuerst die allgemeine Gammafunktion als unendliches Produkt dargestellt, und zwar durch den Grenzwert:

$$(\Gamma_1) \qquad \Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n-1)};$$

aus dieser Definition lassen sich ohne Mühe viele fundamentale Eigenschaften der Gammafunktion herleiten; wir heben insbesondere folgende drei hervor:

$$(\Gamma_2) \qquad \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

$$(\Gamma_3) \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$(\Gamma_4) \qquad \Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2x) \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2^{-2x+1},$$

welche schon Euler bekannt waren; die letzte ist ein spezieller Fall einer viel allgemeineren Formel von Gauß[3]).

Für sehr große Werte der positiven ganzen Zahl n hat schon Stirling[4]) die asymptotische Formel:

$$(\Gamma_5) \qquad \Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\,(1+\varepsilon_n)$$

angegeben, wo ε_n eine positive Größe bedeutet, welche mit wachsendem n der Grenze Null zustrebt.

Weierstraß hat gezeigt, daß $1 : \Gamma(x)$ eine ganze transcendente Funktion vom Genre 1 ist, indem er das Gaußsche Produkt (Γ_1) folgendermaßen schrieb:

$$(\Gamma_6) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{-Cx} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}},$$

1) Die Formeln dieses Abschnittes werden im Texte immer als (Γ_1), (Γ_2) u. s. w. citiert.

2) Disquisitiones generales circa seriem infinitam § 20; Werke Bd. 3.

3) loc. cit. § 26.

4) Man vergleiche zum Beispiel Serret: Calcul intégral p. 217; Paris 1894.

wo C wie gewöhnlich die Eulersche Konstante bedeutet. Die durch (Γ_6) definierte ganze transcendente Funktion hat also in 0 und in den negativen ganzen Zahlen Nullstellen der ersten Ordnung; bedeutet n eine ganze, nicht negative Zahl, so findet man eine Potenzreihe von folgender Form:

$$(\Gamma_7) \qquad \frac{1}{\Gamma(x-n)} = (-1)^n n!\, x + a_2 x^2 + \cdots,$$

welche sonach in der ganzen x-Ebene anwendbar ist.

Der allgemeine Binomialkoeffizient:

$$(\Gamma_8) \qquad \binom{x}{n} = (-1)^n \binom{-x+n-1}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

läßt sich mittelst (Γ_2), nachdem man Zähler und Nenner mit $\Gamma(x-n+1)$ multipliziert hat, durch Gammafunktionen, wie folgt, ausdrücken:

$$(\Gamma_9) \qquad \binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{n!\,\Gamma(x-n+1)}.$$

Bedeutet n eine positive ganze Zahl, während $a+b=c+d$ angenommen wird, so erhält man den Grenzwert:

$$(\Gamma_{10}) \qquad \lim_{n=+\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)} = 1;$$

setzt man nämlich der Kürze halber, wenn n eine positive ganze endliche Zahl bedeutet:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot (n-1)\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)},$$

so ergibt sich durch wiederholte Anwendung von (Γ_2):

$$\Gamma(a+n) = \frac{\Gamma(a)(n-1)!\, n^a}{\Gamma_n(a)};$$

wendet man aber dieselbe Formel auf $\Gamma(b+n)$, $\Gamma(c+n)$ und $\Gamma(d+n)$ an, so liefert (Γ_1) unmittelbar den gewünschten Grenzwert. Die Formel (Γ_{10}) läßt sich natürlich leicht verallgemeinern[1]).

Gauß[2]) hat auch die weitere Funktion:

$$(\Gamma_{11}) \qquad \Psi(x) = D_x \log\Gamma(x) = \frac{\Gamma^{(1)}(x)}{\Gamma(x)} = -C - \sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{x+s} - \frac{1}{s+1}\right),$$

eingeführt, wo C immer die Eulersche Konstante bedeutet; für

1) Man vergleiche meine Note in Le Matematiche Bd. II.

2) loc. cit. § 30.

diese neue Funktion erhält man aus (Γ_2) und (Γ_3) folgende Fundamentalformeln:

$$(\Gamma_{12})\qquad \Psi(x+1)=\frac{1}{x}+\Psi(x),\quad \Psi(1-x)-\Psi(x)=\pi\cot\pi x.$$

Weierstraß[1]) hat zuerst für die ganze transcendente Funktion $1:\Gamma(x)$ den allgemein gültigen Integralausdruck:

$$(\Gamma_{13})\qquad \frac{1}{\Gamma(x)}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\mathfrak{S}}\frac{e^u}{u^x}\,du,$$

angegeben, wo x eine willkürliche endliche Größe ist, während $\mathfrak{S}$ eine Schleife bedeutet, welche im negativen Unendlichen beginnt, sich unterhalb der Achse der negativen reellen Zahlen hinzieht, dann den Nullpunkt umgeht und sich wieder oberhalb der negativen Achse ins negative Unendliche verläuft.

Aus dem von Euler gegebenen elementaren Integralausdrucke ergibt sich ohne Mühe folgende andere Integraldarstellung:

$$(\Gamma_{14})\qquad \int_0^\infty e^{-ty}t^{x-1}dt=\frac{\Gamma(x)}{y^x},\qquad \Re(x)>0,\quad \Re(y)>0;$$

hier fällt der Integrationsweg mit der Achse der positiven reellen Zahlen zusammen.

Für das sogenannte erste Eulersche Integral erhält man zunächst den Ausdruck:

$$(\Gamma_{15})\quad \int_0^1 t^\nu(1-t)^\varrho dt=\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\varrho+1)}{\Gamma(\nu+\varrho+2)},\quad \Re(\nu)>-1,\quad \Re(\varrho)>-1;$$

setzt man hier $t=\sin^2\varphi$, so findet man nach einer kleinen Anderung der Bezeichnungen die weitere Formel:

$$(\Gamma_{16})\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^\nu(\cos\varphi)^\varrho d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varrho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\varrho}{2}+1\right)},\quad \Re(\nu)>-1,\quad \Re(\varrho)>-1;$$

die Substitution $\operatorname{tg}^2\varphi=t$ ergibt nun nach einer abermaligen Änderung der Bezeichnungen:

$$(\Gamma_{17})\quad \int_0^\infty\frac{t^\nu}{(1+t)^\varrho}dt=\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\varrho-\nu-1)}{\Gamma(\varrho)},\quad \Re(\nu)>-1,\quad \Re(\varrho-\nu)>1.$$

1) Citat von Schläfli in Math. Ann. Bd. 3, p. 148. Man vergleiche J. H. Graf: Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale p. 9; Bern 1894.

Wir bedienen uns ferner noch einer Formel, welche wir aus (Γ_{17}) durch die Substitution $t = z^2$ herleiten, nämlich:

$$(\Gamma_{18})\quad \int_0^\infty \frac{t^\nu}{(1+t^2)^\varrho}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\varrho-\nu-1}{2}\right)}{\Gamma(\varrho)},\quad \Re(\nu) > -1,\quad \Re(2\varrho-\nu) > 1,$$

wo ν und ϱ natürlich nicht dieselben sind wie in der vorigen Formel.

Wir gehen schließlich von folgender elementaren Formel:

$$(2\cos\varphi)^n = \sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}\cos(n-2s)\varphi$$

aus, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, und finden unschwer:

$$(\alpha)\qquad 2^{n+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \sin\frac{\pi}{2}\left(\nu+n\right)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s\binom{n}{s}}{\frac{\nu+n}{2}-s};$$

wenden wir jetzt folgende aus der Differenzenrechnung wohlbekannte Formel:

$$(\beta)\qquad \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s\binom{n}{s}}{x+s},$$

an, die sich ohne Mühe auch durch Zerlegung oder sogar in völlig elementarer Weise durch vollständige Induktion herleiten läßt, so erhalten wir aus (α) die weitere Formel:

$$(\gamma)\qquad 2^{n+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{(-1)^n n!\sin\frac{\pi}{2}\left(\nu+n\right)}{\frac{\nu+n}{2}\left(\frac{\nu+n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{\nu+n}{2}-n\right)}.$$

Betrachten wir nunmehr die zwei Fälle, in denen n als gerade oder ungerade vorausgesetzt wird, für sich, so finden wir aus (Γ_2) und (Γ_3) die allgemeine Formel:

$$(\Gamma_{19})\qquad \frac{2^{n+1}}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)},$$

eine Formel, die sich auch mittelst (Γ_4) folgendermaßen schreiben läßt:

$$(\Gamma_{20})\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)}.$$

Die Formel (Γ_{19}) liefert ohne Schwierigkeit noch folgende zwei:

$$(\Gamma_{21})\qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi (\cos\varphi)^{2n}\cos(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{(2n)!\cos\frac{\nu\pi}{2}}{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}+1\right)},$$

$$(\Gamma_{22})\qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi (\sin\varphi)^{2n+1}\sin(\nu\varphi)\,d\varphi = \frac{(2n+1)!\sin\frac{\nu\pi}{2}}{2^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3-\nu}{2}\right)};$$

man braucht ja in der Tat nur die allgemeinen Formeln § 17, (2) von Cauchy anzuwenden.

B. Die hypergeometrische Funktion[1]).

Mit Gauß[2]) setzen wir:

$$(\mathrm{F}_1)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots,$$

so daß diese Potenzreihe den Konvergenzradius 1 besitzt. Für $x=1$ bleibt die Reihe noch konvergent, wenn $\Re(\gamma)>0$, $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ vorausgesetzt wird; wir gewinnen unter diesen Bedingungen folgende Formel von Gauß[3]):

$$(\mathrm{F}_2)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Als spezielle Fälle der allgemeinen hypergeometrischen Funktion heben wir mit Gauß[4]) die folgenden hervor:

$$(\mathrm{F}_3)\qquad F\left(\frac{1+\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right) = \frac{\sin(\nu\arcsin x)}{\nu x},$$

$$(\mathrm{F}_4)\qquad F\left(1+\frac{\nu}{2},\ 1-\frac{\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right) = \frac{\sin(\nu\arcsin x)}{\nu x\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\mathrm{F}_5)\qquad F\left(\frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right) = \cos(\nu\arcsin x),$$

$$(\mathrm{F}_6)\qquad F\left(\frac{1+\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right) = \frac{\cos(\nu\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}};$$

weiter führen wir die andere spezielle Formel an:

$$(\mathrm{F}_7)\qquad F(\alpha,\beta,\beta,x) = (1-x)^{-\alpha}.$$

Von den vielen Transformationsformeln für die hypergeometrische Reihe benutzen wir vor allem diejenige von Euler[5]):

---

1) Die Formeln dieses Abschnittes werden im Texte immer als (F_1), (F_2) u. s. w. citiert.

2) loc. cit. 3) loc. cit. § 24. 4) loc. cit. § 5.

5) Citat von Hankel: Mathematische Annalen Bd. 8, p. 468; 1875.

$$(F_8) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

und diejenige von Kummer[1])

$$(F_9) \qquad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 2^{2\alpha}\left(1+\sqrt{1-x}\right)^{-2\alpha} \cdot \\ \qquad \cdot F\left(\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right); \end{cases}$$

setzen wir in der Kummerschen Formel speziell $\alpha = \beta + \frac{1}{2}$, so liefert uns (F_7) die einfache Formel:

$$(F_{10}) \qquad F\left(\beta+\frac{1}{2}, \beta, 2\beta, x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\beta-1}.$$

In dem folgenden Abschnitte über die Kugelfunktionen bedienen wir uns noch folgender zwei Formeln von Gauß[2]):

$$(F_{11}) \qquad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = A \cdot F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, x) + \\ \qquad + Bx^{\gamma-\alpha-\beta}(1-x)^{\gamma} \cdot F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, x) \end{cases}$$

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$A = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}, \qquad B = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$$

und:

$$(F_{12}) \qquad \begin{cases} F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = A_1 \cdot F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, x\right) + \\ \qquad + B_1\sqrt{x} \cdot F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right), \end{cases}$$

wo wir der Kürze halber:

$$A_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}, \qquad B_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\,\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$$

gesetzt haben.

Die hypergeometrische Reihe läßt sich auch sehr einfach als bestimmtes Integral darstellen; man findet folgende Formel:

$$(F_{13}) \qquad \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx)^{-\alpha}dt = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

wo man:

$$|x| < 1, \quad \Re(\beta) > 0, \quad \Re(\gamma-\beta) > 0$$

voraussetzen muß. Die Formel (F_{13}) läßt sich in der Tat durch gliedweise Integration herleiten, nachdem man die Funktion unter dem Integralzeichen mittelst der Binomialformel nach steigenden

1) Journal für Mathematik Bd. 15, p. 77; 1836.

2) loc. cit. § 43, § 56.

Potenzen von x entwickelt hat. Für $x = 1$ findet man hieraus unmittelbar die Gaußsche Formel (F_2) wieder, denn die hier erhaltenen engeren Bedingungen lassen sich modifizieren, so daß die Formel überall richtig bleibt, wo beide Seiten analytische Funktionen, z. B. von γ, darstellen. Dieser Beweis ist zuerst von Kummer[1]) gegeben worden.

Wir haben noch zu bemerken, daß $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ das eine partikuläre Integral folgender homogenen linearen Differentialgleichung, der Gaußschen Gleichung, sein muß:

$$(F_{14}) \qquad x(1-x)y^{(2)} + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right) y^{(1)} - \alpha\beta y = 0;$$

das andere partikuläre Integral dieser Gleichung wird im allgemeinen in der Umgebung von $x = 0$ durch:

$$(F_{15}) \qquad x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$$

dargestellt.

C. Die Kugelfunktionen[2]).

Wir definieren die allgemeinen Kugelfunktionen der ersten Art durch die Identität:

$$(K_1) \qquad (1 - 2\alpha x + x^2)^{-\nu} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\infty} K^{\nu,s}(\alpha)x^s, \quad \nu \neq 0,$$

und erhalten so durch direkte Ausrechnung für $K^{\nu,n}(\alpha)$ den Ausdruck:

$$(K_2) \qquad \Gamma(\nu)K^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} (2\alpha)^{n-2s};$$

die Annahme $\nu = \frac{1}{2}$ führt zu den gewöhnlichen Legendreschen Kugelfunktionen; also ist:

$$(K_3) \qquad K^{\frac{1}{2},n}(\alpha) = P^n(\alpha).$$

Die sowohl in ν als in α ganze rationale Funktion $K^{\nu,s}(\alpha)$ läßt sich sehr leicht auch als hypergeometrische Funktion darstellen; wir erhalten, je nachdem s gerade oder ungerade ist:

$$(K_4) \qquad K^{\nu,2n}(\alpha) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} \cdot F\left(\nu+n, -n, \frac{1}{2}, \alpha^2\right),$$

$$(K_5) \qquad K^{\nu,2n+1}(\alpha) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot F\left(\nu+n+1, -n, \frac{3}{2}, \alpha^2\right)\alpha.$$

1) loc. cit.

2) Die Formeln dieses Abschnittes werden im Texte immer als (K_1), (K_2) usw. citiert.

Die Gaußschen Transformationsformeln des vorhergehenden Abschnittes gestatten bemerkenswerte Umformungen der Kugelfunktionen. Setzen wir in der Tat in (F_{11}) $\beta = -n$, wo n eine ganze, nicht negative Zahl bedeutet, so verschwindet der Koeffizient B, und wir gewinnen aus (K_4) und (K_5) folgende zwei anderen Formeln:

$$(K_6) \quad K^{\nu, 2n}(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(2\nu + 2n)}{(2n)!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(\nu + n, -n, \nu + \frac{1}{2}, \sin^2\varphi\right),$$

$$(K_7) \quad \begin{cases} K^{\nu, 2n+1}(\cos\varphi) = \dfrac{\Gamma(2\nu + 2n + 1)}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu+1)} \cdot \\ \qquad \cdot F\left(\nu + n + 1, -n, \nu + \frac{1}{2}, \sin^2\varphi\right) \cdot \cos\varphi, \end{cases}$$

während sich aus Formel (F_{12}) unschwer ergibt:

$$(K_8) \quad K^{\nu, 2n}(\cos\varphi) = \frac{\Gamma(2\nu + 2n)}{(2n)!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(2\nu + 2n, -2n, \nu + \frac{1}{2}, \sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$(K_9) \quad \begin{cases} K^{\nu, 2n+1}(\cos\varphi) = \dfrac{\Gamma(2\nu + 2n + 1)}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu+1)} \cdot \\ \qquad \cdot F\left(2\nu + 2n + 1, -2n - 1, \nu + \frac{1}{2}, \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \end{cases}$$

Für $\nu = 0$ ist die Definition (K_1) der Kugelfunktionen demnach unanwendbar: gehen wir dagegen von (K_4) und (K_5) aus, so finden wir unter Anwendung von (F_5) und (F_6), indem wir zugleich $x = \sin\varphi$ setzen:

$$(K_{10}) \quad \lim_{\nu = 0} \left[n\,\Gamma(\nu)\, K^{\nu, 2n}(\sin\varphi)\right] = (-1)^n \cos(2n\varphi),$$

$$(K_{11}) \quad (2n+1) K^{0, 2n+1}(\sin\varphi) = (-1)^n \sin(2n+1)\varphi;$$

setzen wir in diesen Formeln $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ, so erhalten wir weiter:

$$(K_{12}) \quad \lim_{\nu = 0} \left[n\,\Gamma(\nu)\, K^{\nu, 2n}(\cos\varphi)\right] = \cos(2n\varphi),$$

$$(K_{13}) \quad (2n+1) K^{0, 2n+1}(\cos\varphi) = \cos(2n+1)\varphi.$$

Ähnliche Grenzformeln ergeben sich, wenn wir in der Definition (K_1) $\nu = 1$ annehmen; die weitere Annahme $\alpha = \cos\varphi$ gibt dann identisch:

$$\frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - xe^{i\varphi}} + \frac{1}{1 - xe^{-i\varphi}}\right),$$

woraus die Entwicklung:

$$\frac{1 - x\cos\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} = 1 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi) \cdot x^n$$

folgt, so daß:

$$(K_{14}) \quad K^{1, n}(\cos\varphi) - \cos\varphi \cdot K^{1, n-1}(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$$

sein muß. Führen wir in diese Formel für die Kugelfunktionen die Ausdrücke (K_8) und (K_9) ein, so erhalten wir die bekannte Darstellung von $\cos(n\varphi)$ als Polynom von $\cos\varphi$, und dieser Beweis ist für die obenerwähnte elementare Formel vielleicht der einfachst mögliche.

Wir bemerken schließlich noch, daß wir aus (F_{14}) für $y = K^{\nu,n}(x)$ die lineare Differentialgleichung:

$$(K_{15}) \qquad (1-x^2)y^{(2)} - (2\nu+1)xy^{(1)} + n(n+2\nu)y = 0$$

gewinnen.

D. Zwei Integralidentitäten[1]).

Die Formeln mit der Gammafunktion, welche wir vorausgeschickt haben, gestatten uns unmittelbar, einen spezielleren Fall zweier merkwürdiger Integralidentitäten herzuleiten. Aus (Γ_{16}) erhalten wir in der Tat die speziellere Formel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\omega)^{n+1} \cdot (\operatorname{tg}\omega)^\nu \, d\omega = \frac{2^n \,\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)}{(n+1)!},$$

so daß eine Multiplikation mit Formel (Γ_{19}) unmittelbar ergibt:

$$(\alpha) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\omega)^{n+1} (\operatorname{tg}\omega)^\nu \, d\omega \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^n \cos(\nu\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2(n+1)};$$

gehen wir also von folgender Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ϱ:

$$(\beta) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

aus, so finden wir aus (α), vorausgesetzt, daß:

$$|x| < \varrho \quad \text{und} \quad 2 > \Re(\nu) > -2$$

ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin 2\omega \cos\varphi)(\operatorname{tg}\omega)^\nu x \sin 2\omega \cos(\nu\varphi)\, d\omega\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s x^{s+1}}{s+1}.$$

1) Die Formeln dieses Abschnittes werden im Texte immer als (I_1), (I_2) usw. citiert.

oder, was dasselbe ist, folgende merkwürdige Integralidentität:

$$(\mathrm{I}_1)\quad D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin 2\omega \cos\varphi)\,(\operatorname{tg}\omega)^\nu x \sin 2\omega \cos(\nu\varphi)\, d\omega\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot f(x),$$

welche sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(\mathrm{I}_2)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{(1)}(x \sin 2\omega \cos\varphi)\,(\operatorname{tg}\omega)^\nu x \sin 2\omega \cos(\nu\varphi)\, d\omega\, d\varphi = \\ \qquad = \frac{\pi}{2}\left(f(x) - f(0)\right). \end{cases}$$

Die Integralformel (Γ_{16}) gibt weiter folgendes andere Produkt:

$$(\gamma)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\omega)^{n+1}(\operatorname{tg}\omega)^\nu d\omega \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^n (\cos\varphi)^\nu d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n+1},$$

wo $1 > \Re(\nu) > -1$ vorausgesetzt werden muß; somit finden wir für dieselbe Potenzreihe (β) noch folgende weiteren Identitäten:

$$(\mathrm{I}_3)\quad \begin{cases} D_x \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin\omega \sin\varphi)\, \operatorname{tg}\omega)^\nu x \sin\omega\,(\cos\varphi)^\nu d\omega\, d\varphi = \\ \qquad = \frac{\pi}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}\cdot f(x), \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}_4)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{(1)}(x \sin\omega \sin\varphi)\,(\operatorname{tg}\omega)^\nu x \sin\omega\,(\cos\varphi)^\nu d\omega\, d\varphi = \\ \qquad = \frac{\pi}{2\cos\frac{\nu\pi}{2}}\cdot\left(f(x) - f(0)\right). \end{cases}$$

Unsere vier Integralidentitäten sind also vorläufig auf jede Funktion anwendbar, welche sich in der Umgebung von $x = 0$ regulär verhält.

Sucht man nun diese Formeln zu verallgemeinern, so scheint es am geratensten, die Formeln (I_1) und (I_3) zu Grunde zu legen, weil man dann vielleicht nicht notwendig die Differentiierbarkeit von $f(x)$ vorauszusetzen braucht. Wir können indessen auf eine solche Verallgemeinerung hier nicht näher eingehen, müssen uns vielmehr auf einen speziellen Fall beschränken, indem wir den Satz beweisen:

Die Operationen (I_2) *und* (I_4) *sind für die Funktion* $F(x)$ *erlaubt, wenn eine Reihenentwicklung von folgender Form:*

$$(\delta) \qquad F^{(1)}(x) = a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) + \cdots$$

existiert, wo sich die Entwicklungsfunktionen $p_n(x)$ *sämtlich in der Umgebung von* $x = 0$ *regulär verhalten, und wenn außerdem die Reihe* (δ) *für* $0 \leqq x \leqq \varrho$ *gleichmäßig konvergiert.*

Die Entwicklungsfunktionen $p_n(x)$ gestatten ja in der Tat sämtlich beide Operationen, und vermöge der gleichmäßigen Konvergenz sind diese Operationen auf die Reihe (δ) gliedweise anwendbar.

Wir bemerken, daß die Formeln (I_1) und (I_3), (I_2) und (I_4) für $\nu = 0$ identisch sein müssen; setzen wir nämlich in (I_1) oder (I_2) $\frac{1}{2}\omega$ für ω, so findet man die Grenzen 0 und π, und die Formel § 17, (2) von Cauchy führt dann unmittelbar zum Ziele. Dieser Spezialfall von (I_4) war schon Abel[1]) bekannt; ein einfacher, aber nicht strenger Beweis ist von Schlömilch[2]) geliefert worden. Sonin[3]) hat die allgemeine Formel (I_4) mittelst Cylinderfunktionen, aber nicht in aller Strenge hergeleitet; denn seine Herleitung ergibt keine Bedingung, welcher die Funktion $f(x)$ unterworfen werden muß.

E. Trigonometrische Reihen[4]).

Von den trigonometrischen Reihen betrachten wir nur diejenigen, welche in einem Intervalle von der Größe 2π anwendbar sind und zudem noch Fouriersche Reihen sind, d. h. deren Koeffizienten sämtlich durch gewisse bestimmte Integrale dargestellt werden können.

Wir betrachten insbesondere Reihen, welche in dem Intervall $(-\pi, +\pi)$ anwendbar sind, die beiden Grenzen jedoch möglicherweise ausgeschlossen; wir setzen demnach:

$$(T_1) \qquad f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \cos(nx)\right)$$

---

1) Oeuvres complètes Bd. II.

2) Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 2, p. 155; 1857.

3) Mathematische Annalen Bd. 16, p. 48; 1880.

4) Die Formeln dieses Abschnittes werden im Text immer als (T_1), (T_2) usw. citiert.

mit den Koeffizientenbestimmungen:

$$(T_2)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Die *hinreichende* und *notwendige* Bedingung, welcher die Funktion $f(x)$ unterworfen sein muß, um in eine Reihe von der Form (T_1) entwickelbar zu sein, kennen wir nicht.

Für unsere Anwendungen der Fourierschen Reihen reichen aber die von Dirichlet[1]) gegebenen Bedingungen hin:

1) $f(x)$ muß in dem Intervalle $(-\pi, +\pi)$ abteilungsweise stetig und kontinuierlich und zudem eindeutig und integrabel sein.

2) $f(x)$ darf in demselben Intervalle nicht unendlich viele Maxima oder Minima besitzen.

3) Ist a eine Sprungstelle, so hat die Reihe die Summe:

$$\tfrac{1}{2}\big(f(a+0)+f(a-0)\big);$$

für $x = \pm\pi$ wird die Summe immer gleich:

$$\tfrac{1}{2}\big(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\big).$$

Dirichlet hat seine Untersuchungen mittelst der sogenannten Dirichletschen Integrale durchgeführt; es sind dies Integralsätze von folgender Form:

Wenn $f(x)$ den vorhergehenden Bedingungen genügt und n eine positive ganze Zahl bedeutet, so findet man:

$$(T_3)\qquad \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0\quad, & b>a>0 \text{ oder } b<a<0\\ \pi f(0), & b>0,\ a<0\\ \frac{\pi}{2} f(0), & b>0,\ a=0 \text{ oder } b=0,\ a<0; \end{cases}$$

unter denselben Bedingungen ergibt sich dagegen stets:

$$(T_4)\qquad \lim_{n=\infty}\int_a^b \frac{\cos(nx)}{x} f(x)\,dx = 0,$$

wobei jedoch das Integrationsintervall die Null nicht enthalten darf.

Integralsätze von dieser Form sind später von du Bois Reymond[2]) wesentlich verallgemeinert worden.

---

1) Journal für Mathematik Bd. 4; Werke Bd. I, p. 127, 128.

2) Journal für Mathematik Bd. 69; Mathematische Annalen Bd. 4.

Von den zahlreichen Arbeiten über Fouriersche Reihen citieren wir die Abhandlungen von Riemann[1]), Heine[2]), Cantor[3]), du Bois Reymond[4]), Harnack[5]), Hölder[6]) und vor allen von Dini[7]).

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $\cos(\alpha x)$, wo α eine willkürliche endliche Größe bedeutet; da diese Funktion eine gerade ist, müssen die Koeffizienten b_n sämtlich verschwinden; wir finden dann ohne Mühe folgende Entwicklung:

$$(T_5) \qquad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha - s} + \frac{1}{\alpha + s}\right)\cos(sx)\right);$$

für die Funktion $\sin(\alpha x)$ erhalten wir in ähnlicher Weise folgende Sinusreihe:

$$(T_6) \qquad \sin(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{\alpha - s} - \frac{1}{\alpha + s}\right)\sin(sx).$$

Wir brauchen noch einige elementare Fouriersche Reihen, welche wir indessen einfacher durch eine speziellere Methode herleiten können. Die gewöhnliche Potenzreihe:

$$\log(1-x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

ist ja auch für $x = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < +\pi$, anwendbar; vergleicht man die imaginären Komponenten der beiden Seiten in der so erhaltenen Formel, so ersehen wir, daß:

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots, \quad -\pi < \varphi < +\pi;$$

führen wir weiter folgende Bezeichnungen ein:

$$(\beta) \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_r = \frac{1}{1^r} - \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} - \frac{1}{4^r} + \cdots, \quad r \geqq 1,$$

so erhalten wir aus (α) durch wiederholte gliedweise Integration, welche offenbar erlaubt ist, weil ja die Reihe, außer in den Grenzen $\pm\pi$, gleichmäßig konvergent ist, die zwei allgemeineren Formeln:

1) Mathematische Werke, p. 227—265; Leipzig 1892.

2) Journal für Mathematik Bd. 71.

3) Journal für Mathematik Bd. 72, Bd. 73. Mathematische Annalen Bd. 4, Bd. 5. Acta Mathematica Bd. 2.

4) Abhandlungen der Münchener Akademie Bd. 12.

5) Mathematische Annalen Bd. 19.

6) Mathematische Annalen Bd. 24.

7) Serie di Fourier, Bd. I; Pisa 1880.

$$(T_7) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n}} \cdot \cos(s\varphi) = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \sigma_{2n-2r} \cdot \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2r}}{(2r)!},$$

$$(T_8) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^{2n+1}} \cdot \sin(s\varphi) = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \sigma_{2n-2r} \cdot \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2r+1}}{(2r+1)!},$$

wo p eine solche ganze Zahl bedeutet, daß $(2p-1)\pi \leqq \varphi \leqq (2p+1)\pi$ ist. Für $p = 0$ gestatten die Ausdrücke rechter Hand in diesen Formeln eine bemerkenswerte Umformung; setzen wir in der Tat:

$$u_{2r} = \frac{(-1)^r \varphi^{2r}}{(2r)!}, \quad u_{2r+1} = \frac{(-1)^r \varphi^{2r+1}}{(2r+1)!},$$

so gewinnen wir für die Summen der trigonometrischen Reihen folgende Ausdrücke:

$$(T_9) \qquad \sum_{r=0}^{r=n} \sigma_{2n-2r} \cdot u_{2r}, \quad \sum_{r=0}^{r=n} \sigma_{2n-2r} \cdot u_{2r+1},$$

wo die u_r die ersten Glieder der Potenzreihen für $\cos x$ und $\sin x$ bedeuten.

Setzen wir weiter in (α) $\pi - \varphi$ für φ, so ergibt sich:

$$(\gamma) \qquad \frac{\pi - \varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \cdots, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

woraus folgende allgemeinen Formeln:

$$(T_{10}) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^{2n}} \cdot \cos(s\varphi) = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r s_{2n-2r} \cdot \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2r}}{(2r)!} + \\ \displaystyle\qquad + \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{\pi(\varphi - 2p\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2n}}{(2n)!}\right), \end{cases}$$

$$(T_{11}) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^{2n+1}} \cdot \sin(s\varphi) = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r s_{2n-2r} \cdot \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2r+1}}{(2r+1)!} + \\ \displaystyle\qquad + \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{\pi(\varphi - 2p\pi)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(\varphi - 2p\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right), \end{cases}$$

hervorgehen, in denen p eine solche ganze Zahl bedeutet, daß:

$$2p\pi \leqq \varphi \leqq (2p+2)\pi$$

ist und s_r die Summe der numerischen Reihe:

$$s_r = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots, \quad r \geqq 2$$

bezeichnet.

Addieren wir noch (α) und (γ) und setzen wir in der erhaltenen Formel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ, so gelangen wir zu folgender weiteren Formel:

$$(\delta) \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{\cos\varphi}{1} - \frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} - \cdots, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2},$$

aus der sich die allgemeineren:

$$(\mathrm{T}_{12}) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{2n+1}} \cdot \cos(2s+1)\varphi = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \tau_{2n-2r+1} \cdot \frac{(\varphi - p\pi)^{2r}}{(2r)!},$$

$$(\mathrm{T}_{13}) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)^{2n}} \cdot \sin(2s+1)\varphi = \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^r \tau_{2n-2r-1} \cdot \frac{(\varphi - p\pi)^{2r+1}}{(2r+1)!},$$

ergeben, wo p eine solche ganze Zahl bedeutet, daß:

$$(p - \tfrac{1}{2})\pi \leqq \varphi \leqq (p + \tfrac{1}{2})\pi$$

ist, und wo τ_r die Summe der numerischen Reihe:

$$\tau_r = \frac{1}{1^r} - \frac{1}{3^r} + \frac{1}{5^r} - \frac{1}{7^r} + \cdots$$

bedeutet. Formeln von dieser Art sind zuerst von Euler[1]) angegeben worden; die Reihen (T_{10}) und (T_{11}) stehen für $p = 0$ mit den Jacob Bernoullischen Funktionen in sehr naher Verwandtschaft; Raabe[2]) hat diese Funktionen durch die obenerwähnten Reihen definiert, indessen ist es ratsamer, diese Definition etwas zu modifizieren, wie es meines Wissens zuerst Schläfli[3]) getan hat.

Setzen wir in (T_{11}) $\varphi = \pi$, so gewinnen wir durch vollständige Induktion für die numerische Reihe s_{2n} den Ausdruck:

$$s_{2n} = \frac{2^{2n-1} \cdot \pi^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n-1},$$

wo B_{2n-1} eine rationale Zahl, die Bernoullische Zahl vom Range $2n-1$, bedeutet. Ähnliche Ausdrücke finden wir für die Summen σ_{2n} und τ_{2n+1}, während wir über die Natur der Reihen s_{2n+1}, σ_{2n+1}, τ_{2n} nichts wissen.

Wir haben noch betreffs folgender speziellen Reihe:

$$(\mathrm{T}_{14}) \qquad f(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s^x} \cdot \cos(s\omega + \alpha),$$

wo α eine endliche, reelle oder komplexe Konstante, ω einen *reellen* Winkel bedeutet, folgenden Satz zu beweisen:

---

1) Introductio in Analysin infinitorum. 2) Journal für Mathematik Bd. 42.

3) Man vergleiche die Dissertation von Renfer: Definitionen der Bernoullischen Funktion, p. 37; Bern 1900.

$f(x)$ ist in der durch die Bedingung $\Re(x) > 1$ bestimmten Halbebene immer eine in x analytische Funktion; dasselbe gilt auch in dem durch die Bedingungen $0 < \Re(x) \leqq 1$ bestimmten Parallelstreifen der x-Ebene, falls ω nicht ein ungerades Multiplum von π bedeutet.

Der erste Teil dieses Satzes ist einleuchtend, weil dann die betreffende Reihe unbedingt konvergent ist; um auch den letzten Teil zu beweisen, setzen wir:

$$R_{n,p}(x) = \sum_{s=1}^{s=p} \frac{(-1)^{s+n-1}}{(s+n)^x} \cdot \cos\left((s+n)\omega + \alpha\right)$$

und finden so aus der elementaren Formel:

$$2\cos\frac{\omega}{2} \cdot \cos(s\omega + \alpha) = \cos\left(\left(s + \frac{1}{2}\right)\omega + \alpha\right) + \cos\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)\omega + \alpha\right)$$

für $2R_{n,p}(x)\cos\frac{\omega}{2}$ folgenden andern Ausdruck:

$$\frac{(-1)^n \cos\left((n-\frac{1}{2})\omega + \alpha\right)}{(n+1)^x} + \frac{(-1)^{n+p-1}\cos\left((n+p+\frac{1}{2})x + \alpha\right)}{(n+p)^x} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{s=p} (-1)^{s+n} \left(\frac{1}{(s+n+1)^x} - \frac{1}{(s+n)^x}\right) \cos\left((s+n+\tfrac{1}{2})\omega + \alpha\right);$$

nun ist aber nach der Binomialformel:

$$\frac{1}{(s+1)^x} - \frac{1}{s^x} = \frac{x}{s^{x+1}} - \frac{x(x+1)}{2!\, s^{x+2}} + \cdots;$$

somit ist für $\Re(x) > 0$ und $\omega \neq (2q+1)\pi$, wo q eine ganze Zahl bedeutet, das Restglied $R_{n,p}(x)$ als Restglied einer unbedingt konvergenten Reihe anzusehen.

Durch Multiplikation mit $2\sin\frac{\omega}{2}$ beweisen wir einen ähnlichen Satz für die Reihe:

$$(\mathrm{T}_{15}) \qquad g(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^x} \cdot \cos(s\omega + \alpha),$$

wo ω für $0 < \Re(x) \leqq 1$ kein gerades Multiplum von π bedeuten darf; setzen wir ferner in den beiden Reihen (T_{14}) und (T_{15}) $\alpha - \frac{\pi}{2}$ für α, so ergeben sich daraus ähnliche Sätze für die beiden analogen Sinusreihen.

Diese Methode für die Verstärkung der Konvergenz einer trigonometrischen Reihe ist nach Julius Petersen[1]) Malmsten zuzuschreiben.

---

1) Vorlesungen über Funktionentheorie p. 141.

F. Zusätze und Berichtigungen.

Seite 6. Es ist zu bemerken, daß auch Laplace[1]) und Parseval[2]) die Cylinderfunktion $J^0(x)$ gekannt haben.

Seite 27. Die erste Fundamentalgleichung der Cylinderfunktionen:

$$2D_x F^\nu(x) = F^{\nu-1}(x) - F^{\nu+1}(x)$$

ist eigentlich mit Zuhilfenahme der Additionsformel in § 114, (2) von Sonin durch eine Neumannsche Reihe der ersten Art aufgelöst. Setzt man nämlich voraus, daß sich $F^\nu(x)$ im Punkte $x = \alpha$ regulär verhält, und setzt man noch:

$$F^\nu(\alpha) = a(\nu),$$

wo $a(\nu)$ eine arbiträre Funktion von ν bedeutet, so findet man folgende Entwicklung:

$$F^\nu(x+\alpha) = a(\nu)J^0(x) + \sum_{s=1}^{s=\infty}\left(a(\nu-s) + (-1)^s a(\nu+s)\right) J^s(x),$$

wo die willkürliche Funktion nur so zu bestimmen ist, daß diese Reihe konvergiert. Diese Neumannsche Reihe definiert uns also alle *analytischen* Lösungen der obenerwähnten Fundamentalgleichung.

Seite 32. Kapteyn[3]) hat später einen mit demjenigen vom Kriegsminister Madsen gegebenen sehr ähnlichen Beweis für die Formel (14) publiziert.

Seite 56. Parseval[4]) hat das Hansensche Integral für $n = 0$ entwickelt.

Seite 84. Die Formel (4) ist unrichtig; es fehlt rechter Hand das Glied

$$-(\varrho - \nu)C^\nu(\alpha x)C_1^\varrho(\alpha x).$$

Seite 155. Die in (10), (11) gegebenen asymptotischen Entwicklungen sind beide zugleich in derselben willkürlichen Halbebene anwendbar, wie man unmittelbar beweist, indem man in (1), (2) desselben Paragraphen

$$x = re^{i\varphi}, \quad y = -2ie^{(\theta-\varphi)i}, \quad xy = \xi$$

setzt, wo immer $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ sein muß. Man vergleiche übrigens die ähnlichen Beweise pp. 227, 242.

---

1) Histoire de l'Académie de Paris 1779, p. 277.

2) Mémoires des savants étrangers, Bd. 1; 1806. Citat von Burkhardt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 10, p. 401; 1903.

3) Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 14, p. 275 ff.; 1903.

4) loc. cit. Citat von Burkhardt loc. cit. p. 401.

Seite 230. Die asymptotische Reihe für den Integrallogarithmus ist zuerst von Mascheroni[1]) gegeben, später von Soldner[2]), Bretschneider[3]) und insbesondere von Stiltjes[4]) untersucht worden.

Seite 247. Die asymptotische Entwicklung (6) ist in der Tat höchst merkwürdig, indem sie uns unmittelbar folgenden Satz gibt:

Die Quadratsumme $\left(J^{\nu}(x)\right)^2 + \left(Y^{\nu}(x)\right)^2$ *ist in der ganzen unendlichen* x*-Ebene, außer in* $x = 0$, *immer endlich.*

Damit ist aber eine neue merkwürdige Analogie zwischen den Cylinderfunktionen und den Kreisfunktionen dargelegt; für $\nu = \pm \frac{1}{2}$ gewinnt man natürlich aus der obenerwähnten Formel die entsprechende spezielle Identität:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Seite 274. Kapteyn[5]) hat neuerdings eine neue Herleitung der Neumannschen Reihe erster Art für $\frac{1}{y-x}$ gegeben.

Seite 353. Die Bedingung 1) ist im Dinischen Buche durch einen Druckfehler verunstaltet; es steht nämlich dort irrtümlicherweise $x^{\nu-p+\frac{1}{2}} \cdot f(x)$ statt $x^{1-p} \cdot f(x)$.

Nach einer mündlichen Mitteilung[6]) von Professor Dini bleibt sein Satz I noch gültig, wenn man $-\frac{1}{2} > \nu > -1$ (statt $\nu > -\frac{1}{2}$) annimmt, vorausgesetzt, daß man in der Bedingung 1) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot f(x)$ $\left(\text{statt } x^{1-p} \cdot f(x)\right)$ einführt, während die übrigen Bedingungen ungeändert bleiben.

---

1) Citat von Bretschneider im Journal für Mathematik Bd. 17, p. 260; 1837.

2) Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, p. 14; München 1809.

3) loc. cit.; Grunert Archiv Bd. 29, p. 240; Programm des Realgymnasiums Gotha, 1859.

4) Man vergleiche das Büchlein von Borel: Leçons sur les séries divergentes, chap. 2; Paris 1901.

5) Nieuw Archief; 1903.

6) Im Sommer 1903.

Literaturverzeichnis.

Airy, A. G.: Über die Diffraktion eines Objektives mit kreisrunder Apertur. *Poggendorff Annalen* Bd. 45, p. 86—95; 1838 (Aus *Transactions of the Cambridge Phil. Soc.* Bd. 5; 1834).

Aldis, W. St.: On the numerical computation of the functions $G_0(x)$, $G_1(x)$ and $J^n(i\sqrt{x})$. *Proceedings of the Royal Soc. of London* Bd. 66, p. 32—42; 1900.

Anger, C. T.: 1) Untersuchungen über die Funktion J_k^h mit Anwendungen auf das Keplersche Problem. *Neueste Schriften d. Naturf. Ges. Danzig* Bd. 5, 1855.

2) Über das Integral $\int\limits_0^{2\pi} \cos(h\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$; Danzig 1858.

Bach: De l'intégration par les séries de l'équation $y^{(2)} - \frac{x-1}{x} \cdot y^{(1)} - y = 0$ *Annales de l'École Normale* (2) Bd. 3, p. 47—67; 1874.

Baehr, G. F. W.: Sur les racines des équations $\int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos\omega)\,d\omega = 0$ et $\int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega\,d\omega = 0$. *Archives Néerlandaises* Bd. 7, p. 351—358; 1872.

Baer, K.: Die Funktion des parabolischen Cylinders. Programm Cüstrin 1883.

de Ball, L.: Ableitung einiger Formeln aus der Theorie der Besselschen Funktionen. *Astronomische Nachrichten* Bd. 128, col. 1—4; 1891.

Basset, A. B.: A Treatise on Hydrodynamics. Bd. II; London 1888.

Bauer, G.: 1) Von den Koeffizienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variabeln. *Journal für Mathematik* Bd. 56, p. 101—121; 1859.

2) Bemerkungen über Reihen nach Kugelfunktionen und insbesondere auch über Reihen, welche nach Produkten oder Quadraten fortschreiten, mit Anwendungen auf Cylinderfunktionen. *Berichte der Münchener Akademie* 1875, p. 261—269.

Beltrami, E.: 1) Intorno ad alcuni teoremi di Abel e ad alcune sue applicazioni. *Istituto Lombardo Rendiconti* (2) Bd. 13, p. 327—337; 1880.

2) Intorno ad alcune serie trigonometriche. *Istituto Lombardo Rend.* (2) Bd. 13, p. 402—413; 1880.

3) Sulle funzioni cilindriche. *Atti dell' Accad. di Torino* Bd. 16, p. 201—205; 1881.

4) Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. *Memorie dell' Accad. di Bologna* (4) Bd. 3, p. 416—507; 1881.

Bernoulli, D.: 1) Theoremata de oscillationibus corporum filo flexibili convexorum et catenae verticaliter suspensae. *Commentarii Academiae Petropolitanae* Bd. 6, p. 108—129; 1732—33 (1738).

2) Demonstrationes theorematum suorum de oscillationibus corporum filo flexibili convexorum et catenae verticaliter suspensae. *Comm. Acad. Petrop.* Bd. 7, p. 162—173; 1734—35 (1740).

Bessel, F. W.: 1) Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. *Abhandlungen der Berliner Akademie* 1824, p. 1—52 (1826).

2) Beitrag zu den Methoden, die Störungen der Kometen zu berechnen. *Astronomische Nachrichten* Bd. 14, col. 1—48; 1837.

Betti, E.: Alcune determinazioni delle temperature variabili di un cilindro. *Annali delle Università Toscane.* Pisa 1868, p. 145—168.

Bôcher, M.: 1) On Bessel's functions of the second kind. *Annals of Mathematics* Bd. 6, p. 85—90; 1892.

2) On some applications of Bessel's functions with pure imaginary index. *Annals of Mathematics* Bd. 6, p. 137—160; 1892.

3) On certain methods of Sturm and their application to the roots of Bessel's functions. *Bulletin of the American Math. Soc.* (2) Bd. 2, p. 205—213; 1897.

4) An elementary proof that Bessel's function of the zeroth order have an infinity of real roots. *Bull. of the Amer. Math. Soc.* (2) Bd. 5, p. 385—388; 1899.

5) On certain pairs of transcendental functions, where roots separate each other. *Transactions of the American Math. Soc.* Bd. 2, p. 428—436; 1901.

6) On the real solutions of systems of two homogeneous linear differential equations of the first order. *Transactions of the Am. Math. Soc.* Bd. 3, p. 196—215; 1902.

du Bois Reymond, P.: Die Theorie der Fourierschen Integrale und Formeln. *Mathematische Annalen* Bd. 4, p. 362—390; 1871.

Bourget, J.: 1) Note sur une formule de M. Anger. *Comptes rendus* Bd. 39, p. 283; 1854.

2) Mémoire sur les nombres de Cauchy et leurs applications à divers problèmes de mécanique céleste. *Journal de Mathématiques* (2) Bd. 6, p. 33—54; 1861.

3) Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires. *Annales de l'École Normale* Bd. 3, 1866.

4) Mémoire sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice. *Journal de Mathématiques* (2) Bd. 18, p. 101—128; 1873.

Bruhns, H.: Über die Beugungsfigur des Heliometer-Objektives. *Astronomische Nachrichten* Bd. 104, col. 1—8; 1883.

Burkhardt, H.: Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* Bd. 10; 1901, 1902, 1903.

Byerly, W. E.: An elementary Treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical und ellipsoidal Harmonics. Boston 1895.

Callendreau, O.: 1) Calcul des transcendantes de Bessel $J_n(a)$ pour des grandes valeurs de a, au moyen des séries semi-convergentes. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 14, p. 110—114; 1890.

2) Sur le calcul des polynômes $X_n(\cos\varphi)$ de Legendre pour des grandes valeurs de *n*. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 15, p. 121—124; 1891.

Carlini, F.: Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero. Milano 1817. Deutsch von Jacobi in *Astr. Nachr* Bd. 30, col. 197—254; 1850.

Carlslaw, H. S.: Some multiform solutions of the partial differential equations of physical mathematics and their applications. *Proceedings of the London Math. Soc.* Bd. 30, p. 121—161; 1899.

Catalan, E.: Rapport sur une note de M. le Paige. *Bulletin de l'Académie de Belgique* (2) Bd. 61, p. 935—939; 1876.

Cauchy, A. L.: 1) Note sur une transcendante qui renferme le développement perturbatrice relative au système planétaire. *Comptes rendus* Bd. 13, p. 682—687; 1841.

2) Note sur la substitution des anomalies excentriques aux anomalies moyennes dans les developpements de la fonction perturbatrice. *Comptes rendus* Bd. 13, p. 850—854; 1841.

3) Sur une formule de M. Anger et sur d'autres formules analogues. *Comptes rendus* Bd. 39, p. 129—134; 1854.

Chessin, A. S.: 1) On the expression of Bessel's functions in form of definite integrals. *Johns Hopkins University Circulars.* Bd. 14, Nr. 116, p. 20—21; Jan. 1895.

2) On the relation between Cauchy's numbers and Bessel's functions. *Annals of Mathematics* Bd. 12, p. 170—174; 1899.

Christoffel, E. B.: Zur Abhandlung (von Heine) „Über Zähler und Nenner der Näherungswerte von Kettenbrüchen" p. 131 des vorigen Bandes. *Journal für Mathematik* Bd. 58, p. 90—92; 1861.

Chwolson, O.: Über die Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit von der Temperatur. *Mém. de l' Acad. de St. Pétersbourg* (7) Bd. 37; 1890 (russisch).

Cinelli, M.: Sopra un nuovo modo di dedurre le formole generali per i fenomeni di diffrazione di Fraunhofer per aperture superfici curve etc. *Nuovo Cimento* (4) Bd. 1, p. 141—155; 1895.

Clebsch, A.: Über die Reflexion an einer Kugelfläche. *Journal für Mathematik* Bd. 61, p. 195—262; 1863.

Coates, C. V.: 1) Bessel's functions of the second order. *Quarterly Journal* Bd. 20, p. 250—260; 1885.

2) Bessel's functions of the second order. *Quarterly Journal* Bd. 21, p. 183—192; 1886.

Crelier, L.: 1) Sur quelques propriétés des fonctions besséliennes tirées de la théorie des fractions continues. *Annali di Matematica* (2) Bd. 24, p. 131—163; 1896. Auch Dissertation, Bern 1895.

2) Sur les fonctions besséliennes de deuxième espèce $S^n(x)$ et $O^n(x)$. *Actes de la Société bernoise des sc. nat.* 1897, p. 61—96.

3) Sur les fonctions besséliennes $O^n(x)$ et $S^n(x)$. *Comptes rendus* Bd. 125, p. 421—423, 860—863; 1897.

Dini, U.: Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale Bd. I, Pisa 1880 (Bd. II nicht erschienen).

Dougall, J.: The determination of Greens functions by mean of cylindrical and spherical harmonics. *Proceedings of the Edinbourgh Math. Soc.* Bd. 18, p. 37—83; 1900.

Duhamel, J. M. C.: Sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques coniques etc. *Journal de Mathématiques* Bd. 14, p. 49—110; 1849.

Elsas, A.: Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Sitzungsberichte der Ges. der Naturwissenschaften Marburg* 1889, p. 31—45.

Epstein, S. S.: Die vier Rechnungsoperationen mit Besselschen Funktionen. Dissertation, Bern 1894.

Ermakoff, W.: Über die Cylinderfunktion. *Mathematische Annalen* Bd. 5, p. 639—640; 1873.

v. Escherich, G.: 1) Zur Besselschen Differentialgleichung. *Monatshefte für Mathematik und Physik* Bd. 3, p. 142; 1892.

2) Über eine Näherungsformel. *Monatsh. für Math. und Ph.* Bd. 3, p. 234; 1892.

Euler, L.: 1) De motu vibratorio tympanorum. *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae* Bd. 10, p. 243—260; 1764.

2) Institutiones calculi integralis Bd. 2; 1769.

3) De oscillationibus minimis funis libere suspensi. *Acta Academiae Petropolitanae* 1781, p. 157—177.

4) De perturbatione motus chordarum ab earum pondere oriunda. *Acta Ac. Petropolitanae* 1781, p. 178—190.

Feldblume, M.: Theorie der Riccatischen Gleichung und Eigenschaften der sie befriedigenden Funktionen. *Warschau Univ.* 1898—1899 (russisch).

Flamme, J. B.: Recherches des expressions approchées des termes très-éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes. Diss. Paris 1887. *Annales de l'Observatoire de Toulouse* Bd. 2; 1887.

Fourier, J. B. J.: Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822. Deutsch von Weinstein, Berlin 1884.

Fricke, R.: Kurzgefaßte Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik Bd. I, Leipzig 1900.

Gallop, E. G.: The distribution of electricity on the circular disc and spherical bowl. *Quarterly Journal* Bd. 21, p. 229—256; 1886.

Gegenbauer, L.: 1) Note über die Besselschen Funktionen zweiter Art. *Sitzungsberichte der Wiener Akademie* Bd. 65 II, p. 33—35; 1872.

2) Zur Theorie der Besselschen Funktionen der zweiten Art. *Wiener Sitzungsberichte* Bd. 66 II, p. 220—223; 1872.

3) Note über bestimmte Integrale. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 67 II, p. 202—204; 1873.

4) Über die Besselschen Funktionen. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 69 II, p. 6—16; 1874.

5) Über einige bestimmte Integrale. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 70 II, p. 433—443; 1874.

6) Über die Besselschen Funktionen. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 74 II, p. 124—130; 1876.

7) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 75 II, p. 218—222; 1877.

8) Über die Funktion $C_n^\nu(x)$. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 75 II, 1877.

9) Das Additionstheorem derjenigen Funktionen, welche bei der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 81 II, p. 491—502; 1882.

10) Über die Besselschen Funktionen. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 88 II, p. 975—1003; 1883.
11) Über die Besselschen Funktionen. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 95 II, p. 409—410; 1887.
12) Über die Ringfunktion. *Wiener Sitzungsber.* Bd. 100, p. 715—766; 1891.
13) Über die zum elektromagnetischen Potentiale eines Kreisstromes associierte Funktion. *Monatsh. für Math. und Physik* Bd. 4, p. 391—401; 1893.
14) Eine Integralrelation. *Monatsh. für Math. und Physik* Bd. 5, p. 53—61; 1894.
15) Bemerkung über die Besselschen Funktionen. *Monatsh. für Math. und Physik* Bd. 8, p. 383—384; 1897.
16) Notiz über die Besselschen Funktionen der ersten Art. *Monatsh. für Math. und Physik* Bd. 10, p. 189—192; 1899.
17) Letter to Mr. Macdonald. *Proceedings of London Math. Soc.* Bd. 32, p. 433—436; 1900.
18) Quelques propriétés nouvelles des racines des fonctions de Bessel de première espèce. *Lièges Mém.* (3) Bd. 2. 1900.

Giuliani, G.: 1) Sopra la funzione $P^n(\cos\gamma)$ per n infinito. *Giorn. di Mat.* Bd. 22, p. 236—240; 1884.
2) Sopra alcune funzioni analoghe alle funzioni cilindriche. *Giorn. di Mat.* Bd. 25, p. 198—202; 1887.
3) Alcune osservazioni sopra le funzioni sphieriche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possono dedurre. *Giorn. di Mat.* Bd. 26, p. 155—171; 1880.

Glaisher, J. W. L.: On Riccati's equation and its transformation and of some definite integrals which satisfy them. *Philosophical Transact.* Bd. 172, p. 759—828; 1882.

Graf, J. H.: 1) Über die Addition und Subtraktion der Argumente bei Besselschen Funktionen nebst einer Anwendung. *Mathematische Annalen* Bd. 43, p. 135—144; 1893.
2) Über einige Eigenschaften der Besselschen Funktionen erster Art, insbesondere für ein großes Argument. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 38, p. 115—120; 1893.
3) Relation entre la fonction bessélienne de 1ère espèce et une fraction continue. *Annali di Mat.* (2) Bd. 23, p. 45—65; 1895.
4) Ableitung der Formeln für die Besselschen Funktionen, bei welchen das Argument eine Distanz darstellt. *Verh. d. Schweiz. Naturf. Ges.* 1896.

Graf und Gubler: Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. Heft I—II; Bern 1898, 1900.

Gram, J. P.: Om Rækkeudviklinger bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode. Diss. Kopenhagen 1879. Deutsch: *Journal für Math.* Bd. 94.

Gray und Matthews: A treatise on Bessel functions and their application to Physics. London 1895.

Greenhill, A. G.: On Riccati's equation and Bessel's equation. *Quarterly Journal* Bd. 16, p. 294—298; 1879.

Gubler, E.: 1) Die Darstellung der allgemeinen Besselschen Funktionen durch bestimmte Integrale. *Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. in Zürich* Bd. 33, p. 130—172; 1888.

2) Verwandlung einer hypergeometrischen Reihe im Anschluß an das Integral $\int_0^\infty J^a(x) e^{-bx} x^{c-1} dx$. Diss. Bern 1894. *Mathematische Ann.* Bd. 48; 1896.

3) Beweis einer Formel des Herrn Sonin. *Math. Ann.* Bd. 49, p. 583—584; 1897.

Gubler und Graf s. Graf und Gubler.

Günther, S.: Bemerkungen über Cylinderfunktionen. *Archiv d. Math. und Physik* Bd. 56, p. 292—297; 1874.

Häntzschel, E.: 1) Über die Reduktion der Gleichung $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$ auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Laméschen Funktionen zweiter Ordnung. Diss. Jena 1883.

2) Zur Theorie der Funktionen des elliptischen Cylinders. Programm. Duisburg 1886.

3) Über den funktionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Laméschen, Laplaceschen und Besselschen Funktionen. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 31, p. 31—33; 1886.

4) Über die Fourier-Besselsche Transcendente. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 33, p. 185—186; 1888.

5) Beitrag zur Theorie der Funktionen des elliptischen und des Kreiscylinders. Programm; Berlin 1889.

6) Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Programm; Berlin 1893.

Hamilton, W. R.: On fluctuating functions. *Transactions of the Irish Academy* Bd. 19, II, p. 264—321; 1843.

Hankel, H.: 1) Die Cylinderfunktionen erster und zweiter Art. *Mathematische Annalen* Bd. 1, p. 467—501; 1869.

2) Bestimmte Integrale mit Cylinderfunktionen. *Math. Ann.* Bd. 8, p. 453—470; 1875.

3) Die Fourierschen Reihen und Integrale für Cylinderfunktionen. *Math. Ann.* Bd. 8, p. 471—494; 1875.

Hansen, P. A.: 1) Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung. *Schriften der Sternwarte Seeburg* (Gotha) 1843. Französisch, Paris 1845.

2) Entwicklung des Produktes einer Potenz des Radius vector mit dem Sinus oder Cosinus der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der wahren exzentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. *Leipziger Abhandlungen* Bd. 2, p. 181—281; 1855.

Hargreave, C. J.: On the solution of differential equations. *Philisophical Transactions* 1848, p. 31—54.

Harnack, A.: Über die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch die Fourier-Besselsche Funktion. *Leipziger Berichte* 1887, p. 191—214. *Mathem. Annalen* Bd. 35. p. 41—62; 1889.

Hartenstein, H.: 1) Über die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 f$ für Polar- und elliptische Koordinaten nebst Behandlung eines mit demselben zusammenhängenden physikalischen Problems. Diss. Dresden 1887.

2) Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = kf$ für elliptische und parabolische Koordinaten. *Archiv der Mathematik und Physik* (1) Bd. 11, p. 170—181; 1869.

Heine, E.: 1) Die Fourier-Besselsche Funktion. *Journal für Math.* Bd. 69, p. 128—141; 1868.

2) Handbuch der Kugelfunktionen. Bd. I—II; Berlin 1878—1881.

Hermite, C.: 1) Sur la transcendante $E(x)$. *Annali di Mat.* (2) Bd. 3, p. 83; 1869.

2) Extrait d'une lettre à Monsieur Paul Gordan. *Journal für Math.* Bd. 76, p. 303—311; 1873.

Hertz, H.: 1) Über das Gleichgewicht schwimmender elastischer Platten. *Wiedemann Annalen* (2) Bd. 22, p. 449—455; 1884.

2) Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwellschen Theorie. *Wiedemann Annalen* (2) Bd. 36, p. 1—22; 1889.

Herz, N.: Bemerkungen zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Astron. Nachrichten* Bd. 107, col. 17—27; 1884.

Hobson, E. W.: 1) On Bessel's functions and relations connecting them with hyperspherical and spherical harmonics. *Proceedings of London Math.* Bd. 25, p. 49—75; 1894.

2) On the moste general solution of given degree of Laplace's equation. *Proc. of Lond. Math. Soc.* Bd. 26, p. 492—494; 1895.

3) Note on some properties of Bessel's functions. *Proc. of Lond. Math. Soc.* Bd. 28, p. 390—395; 1897.

Horn, J.: Über lineare Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter. *Math. Annalen* Bd. 52, p. 342—362; 1899.

Hurwitz, A.: Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 33, p. 246—266; 1889.

Jacobi, C. G. J.: 1) Formula transformationis integralium definitorum. *Journal für Math.* Bd. 15, p. 1—36; 1836.

2) Versuch einer Berechnung der großen Ungleichheit des Saturnus nach einer strengen Entwicklung. *Astron. Nachrichten* Bd. 28, col. 65; 1848.

3) Über die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwicklung der elliptischen Koordinaten nebst einer Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Bestimmung der Funktionen großer Zahlen. *Astron. Nachr.* Bd. 28, col. 257—270; 1848.

Jährisch, P.: Zur Theorie der Schwingungen einer elastischen Halbkugel. *Mitt. der Math. Ges. in Hamburg* Bd. 3, p. 51—73; 1892.

Jordan, C.: Cours d'Analyse Bd. III; Paris 1887.

Julius, V. A.: Sur les fonctions de Bessel de deuxième espèce. *Archives Néerlandaises* Bd. 28, p. 221—225; 1895.

Kapteyn, W.: 1) Nouvelles formules pour représenter la fonction $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ de Bessel. *Darboux Bulletin* (2) Bd. 16, p. 41—44; 1892.

2) Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel. *Annales de l'Éc. Normale* (3) Bd. 10, p. 91—122; 1893.

3) Over Bessel'sche Functiën. *Nieuw Archief* Bd. 20, p. 116—127; 1893.

4) Sur quelques intégrales contenant des fonctions de Bessel. *Archives Néerlandaises* 1901.

5) Einige Bemerkungen über Besselsche Funktionen. *Monatshefte für Mathematik und Physik* Bd. 14, p. 275—282; 1903.

6) Sur un développement de M. Neumann. *Nieuw Archief* 1903.

Kirchhoff, G.: 1) Zur Theorie der Bewegung der Elastizität in unterseeischen und unterirdischen Telegraphendrähten. *Berliner Monatsberichte* 1877, p. 598—611.

2) Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitte. *Berliner Monatsberichte* 1879, p. 815—828. *Wiedemann Annalen* Bd. 10, p. 501—512; 1880.

3) Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. *Berliner Sitzungsberichte* 1883, p. 519—525.

König, J.: 1) Über die Darstellung von Funktionen durch unendliche Reihen. *Mathematische Annalen* Bd. 5, p, 310—340; 1872.

2) Über Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen. *Math. Ann.* Bd. 17, p. 85—86; 1880.

Koppe, M.: Die Ausbreitung einer Erschütterung an der Wellenmaschine, darstellbar durch einen neuen Grenzfall der Besselschen Funktionen. Programm Berlin, 1899.

Lamb, H.: 1) On the oscillations of a viscous spheroid. *Proceed. of London Math. Soc.* Bd. 13, p. 51—66; 1882.

2) On the deduction of electric currents in cylindrical and spherical conductors. *Proc. of Lond. Math. Soc.* Bd. 15, p. 139—149; 1884.

de Laplace, P. S.: Mémoire sur les suites. *Hist. de l'Ac. de Paris* 1779, p. 267—309.

Legendre, A. M.: Éléments de géométrie, Note IV; Paris 1817 (11. Ausg.).

Lerch, M.: Betrachtung über einige Fragen der Integralrechnung. *Rozpravy* (5) No. 23 (böhmisch) s. *Jahrbuch über die Fortschr. d. Math.* Bd. 27, p. 233; 1896.

Le Roy, E.: Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor *Toulouse Annales* (2) Bd. 2, p. 317—340; 1900.

Lipschitz, R.: Über ein Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial J}{\partial x} + J = 0$. *Journal für Math.* Bd. 56, p. 189—196; 1859.

Lodge, O. J.: The rotation of the plan of polarization of light by the discharge of a Leyden jar. *Philosophical Magazine* (5) Bd. 27, p. 339—349; 1889.

Lohberg, P.: Über den induzierten Magnetismus eines unbegrenzten geraden Kreiscylinders und eines Rotationsparaboloids. Programm Höchst 1889.

Lohschmidt, J.: Schwingungszahlen einer elastischen Halbkugel. *Wiener Sitzungsberichte* Bd. 93, p. 434—446; 1886.

v. Lommel, E.: 1) Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868.

2) Integration der Differentialgleichung $x^{m+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^{2m+1} y}{\partial x^{2m+1}} \mp y = 0$ durch Besselsche Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 2, p. 624—635; 1870.

3) Über die Anwendung der Besselschen Funktionen in der Theorie der Beugung. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 15, p. 141—169; 1870.

4) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 3, p. 475—488; 1871.

5) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 4, p. 103—116; 1871.
6) Über eine mit den Besselschen Funktionen verwandte Funktion. *Math. Annalen* Bd. 9, p. 425—444; 1876.
7) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 14, p. 510—536; 1879.
8) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Math. Annalen* Bd. 16, p. 183—208; 1880.
9) Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet. *Münchener Abhandlungen* Bd. 15, p. 233—328; 1884.
10) Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. *Münchener Abhandlungen* Bd. 15, p. 529—564; 1886.
11) Theorie der Dämmerungsfarben. *Münchener Abhandlungen* Bd. 19, p. 449—508, p. 735—744; 1897.

Lorenz, L.: Om arbitrære Funktioners Udvikling ved givne Funktioner. *Tidsskrift for Mathematik* (3) Bd. 6, p. 129—144; 1876 (Kopenhagen).

Macdonald, H. M.: 1) The electrical distribution induced on a circular disc placed in any field of force. *Proceedings of London Math. Soc.* Bd. 26, p. 257—260; 1895.
2) The electrical distribution induced in an infinite plane disc with a circular hole in it. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 27, p. 68; 1896.
3) Note on Bessel functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 29, p. 110—115; 1898.
4) Zeros of the Bessel functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 29, p. 575—589; 1898.
5) Zeros of the Bessel functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 30, p. 165—179; 1899.
6) The addition theorem of the Bessel functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 32, p. 152—159; 1900.

Mac Mahon, J.: 1) On the descending series for Bessel's functions of both kinds. *Annals of Math.* Bd. 8, p. 57—61; 1894.
2) On the roots of the Bessel and related functions. *Annals of Math.* Bd. 9, p. 23—30; 1894.
3) Notes on the expression for a velocity-potential in terms of functions of Laplace and Bessel. *Bulletin of the American Math. Soc.* (2) Bd. 8, p. 173—177; 1896.

Madsen, V. H. O., Kriegsminister, Generalmajor: Lösning of Opgave 84. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 13B, p. 21—22; 1902.

Maggi, G. A.: 1) Sulla storia delle funzioni cilindriche. *Atti della R. Accademia dei Lincei* (3) Bd. 4, p. 259—263; 1880.
2) Sopra una serie inequabilmente convergente. *Istituto Lombardo Rendiconti* (2) Bd. 27, p. 368—372; 1893.

Marcolongo, R.: 1) Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie. *Rendiconti dell' Accademia di Napoli* (2) Bd. 3, p. 96—99; 1889.
2) Sulla equazione $\Delta_2 u + k^2 u = 0$ in uno spazio di n dimensioni. *Annali di Mat.* (2) Bd. 24, p. 310—314; 1896.

Matthews und Gray s. Gray und Matthews.

Mayall, R. H. D.: On the diffraction pattern near the focus of a telescope. *Cambridge Proceedings* Bd. 9, p. 259—268; 1897.

Mehler, F. G.: 1) Über die Verteilung der statischen Elektrizität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper. *Journal für Math.* Bd. 68, p. 134—150; 1868.

2) Über eine mit den Kugel- und Cylinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsverteilung. Programm, Elbing 1870. *Mathematische Annalen* Bd. 18, p. 161—194; 1881.

3) Über die Darstellung einer willkürlichen Funktion zweier Variabeln durch Cylinderfunktionen. *Math. Annalen* Bd. 5, p. 135—140; 1872.

4) Notiz über die Dirichletschen Integralausdrücke für die Kugelfunktionen $P^n(\cos\theta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunktion $J(x)$. *Mathematische Annalen* Bd. 5, p. 140—144; 1872.

Meissel, E.: 1) Gewerbeschulprogramm, Iserlohn 1862[1]).

2) Tafel der Besselschen Funktionen J_k^0 und J_k^1 von $k = 0$ bis $k = 15{,}5$. *Berliner Abhandlungen* 1888, 23 Seiten.

3) Über die Besselschen Funktionen J_k^0 und J_k^1. Programm Kiel 1890.

4) Beitrag zur Theorie der allgemeinen Besselschen Funktionen. *Astronomische Nachrichten* Bd. 127, col. 145—154; 1894.

5) Über die absoluten Maxima der Besselschen Funktionen. Programm Kiel 1892.

6) Einige Entwicklungen die Besselschen J-Funktionen betreffend. *Astron Nachrichten* Bd. 127, col. 359—362; 1892.

7) Beitrag zur Theorie der allgemeinen Besselschen Funktionen. *Astron. Nachrichten* Bd. 128, col. 145—154, col. 435—338; 1892.

8) Abgekürzte Tafel der Besselschen Funktionen. *Astron. Nachr.* Bd. 128, col. 154—156; 1892.

9) Neue Entwicklung über die Besselschen Funktionen. *Astron. Nachr.* Bd. 129, col. 280—284; 1892.

10) Weitere Entwicklung über die Besselschen Funktionen. *Astron. Nachr.* Bd. 130, col. 363—368; 1893.

Nagoaki, H.: 1) A problem of diffraction. *Tokio Math. Gesellsch.* Bd. 5, p. 75—79; 1892.

2) Diffraction phenomena in the focal plane of a telescope with circular aperture, due to a finite source of light. *Philisophical Magazine* (5), Bd. 45, p. 1—23; 1898.

Neumann, C.: 1) Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. Halle 1862.

2) Über das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektrizität in einem Körper, welcher von zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt wird. *Journal für Math.* Bd. 62, p. 39—49; 1863.

3) Über die Entwicklung beliebig gegebener Funktionen nach den Besselschen Funktionen. *Journal für Math.* Bd. 67, p. 310—314; 1867.

4) Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig 1867.

5) Über die Entwicklung einer Funktion nach Quadraten und Produkten der Fourier-Besselschen Funktionen. *Leipziger Berichte* 1869, p. 221—256. *Mathematische Annalen* Bd. 2, p. 192; 1870, Bd. 3, p. 581—610; 1871.

---

1) Citat von Meissel: Jahresbericht über die Oberrealschule in Kiel 1890, p. 1.

6) Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen unter durchgängiger Anwendung des du Bois Reymondschen Mittelwertsatzes. Leipzig 1881.

7) Über gewisse partikuläre Integrale der Differentialgleichung $\Delta F = F$, insbesondere über die Entwicklung dieser partikulären Integrale nach Kugelfunktionen. *Leipziger Berichte* 1886, p. 75—82.

Newall, H. F.: On the marks made by stars on photographic plates exposed near the focus of a telescope. *Cambridge Proceedings* Bd. 9, p. 269—271; 1897.

Nicolas, J.: Etude des fonctions de Fourier. *Annales de l'Éc. Normale* (2) Bd. 11 Supplément; 1882.

Nielsen, N.: 1) Udviklinger efter Cylinderfunktioner. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 9 B, p. 73—83; 1898.

2) Sur le produit de deux fonctions cylindriques. *Math. Annalen* Bd. 52, p. 228—242; 1899.

3) Sur le développement du zéro en série de fonctions cylindriques. *Math. Annalen* Bd. 52, p. 582—587; 1899.

4) Flertydige Udviklinger efter Cylinderfunktioner. *Nyt Tidsskrift for Math.* Bd. 10 B, p. 73—81; 1899.

5) Note sur les développements schlœmilchiens en séries de fonctions cylindriques. *Bulletin de l'Ac. de Danemark*, 1899, p. 661—665.

6) Note supplémentaire relative aux développements schlœmilchiens en séries de fonctions cylindriques. *Bull. de l'Ac. de Danemark*, 1900, p. 55—60.

7) Sur une classe de polynômes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques. *Annali di Matematica* (3) Bd. 5, p. 27—41; 1900, Bd. 6, p. 331—340; 1901.

8) Recherches sur les séries de fonctions cylindriques dues à M. M. C. Neumann et W. Kapteyn. *Annales de l'Éc. Normale* (3) Bd. 18, p. 39—75; 1901.

9) Recherches sur une classe de séries infinies analogues à celles de M. W. Kapteyn. *Bull. de l'Ac. de Danemark*, 1901, p. 127—146.

10) Évaluation nouvelle des intégrales indéfinies et des séries infinies contenant une fonction cylindrique. *Annali di Mat.* (3) Bd. 6, p. 43—115; 1901.

11) Sur une classe de séries infinies analogues à celles de M. Schlömilch selon les fonctions cylindriques. *Annali di Mat.* (3) Bd. 6, p. 301—329; 1901.

12) Note sur la convergence d'une série neumannienne de fonctions cylindriques. *Mathematische Annalen* Bd. 55, p. 493—496; 1901.

13) Sur les séries de factorielles. *Comptes rendus* Bd. 134, 20 janvier 1902.

14) Théorie nouvelle des séries asymptotiques obtenues pour les fonctions cylindriques et pour des fonctions analogues. *Bull. de l'Ac. de Danemark*, 1902, p. 117—177.

15) Équations différentielles linéaires obtenues pour les produits de deux fonctions cylindriques. *Nouvelles Annales* (4) Bd. 2, p. 396—410; 1902.

Niemöller, F.: 1) Über die Schwingungen einer Saite, deren Spannung eine stetige Funktion der Zeit ist. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 25, p. 44—48; 1880.

2) Formeln zur numerischen Berechnung des allgemeinen Integrals der Besselschen Differentialgleichung. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 25, p. 65—71; 1880.

Niven, C.: On the conduction heat in ellipsoids of revolution. *Philosophical Transactions* Bd. 171, p. 117—151; 1880.

Oberbeck, A.: Über elektrische Schwingungen. Magnetisierende Wirkung derselben. *Wiedemann Annalen* Bd. 21, p. 672—697; 1883. *Berliner Sitzungsberichte* 1883.

Olbricht, R.: Studien über die Kugel- und Cylinderfunktionen. Diss. Halle 1887. *Nova acta d. Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie* Bd. 52.

Orr, W. M. F.: On the product $J_m(x) J_n(x)$. *Cambridge Proceedings* Bd. 9, p. 93—100; 1899.

Otti, H.: Eigenschaften der Besselschen Funktionen zweiter Art. Diss. Bern 1899.

Parseval: in *Mém. des savants étrangers*, Paris, Bd. 1, 1806 [1]).

Peirce und Wilson s. Wilson und Peirce.

Picard, E.: Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité. *Comptes rendus* Bd. 118, p. 116—117; 1894.

Pincherle, S.: 1) Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche. *Memorie dell' Istituto di Bologna* (4) Bd. 3, p. 151—180; 1881.

2) Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche. *Rendiconti dell' Istituto Lombardo* (2) Bd. 15, p. 524—525; 1882.

3) Della trasformazione di Laplace e di alcune sui applicazioni. *Memorie dell' Istituto di Bologna* (4) Bd. 8, p. 125—144; 1887.

Plana, J.: Recherches analytiques sur la découverte de la loi de pésenteur des planètes vers le soleil et sur la théorie de leur mouvement elliptique. *Memorie dell' Accademia di Torino* (2) Bd. 10, p. 249—332; 1849.

Pockels, F.: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig 1891.

Poincaré, H.: Sur la propagation de l' électricité. *Comptes rendus* Bd. 117, p. 1027—1032; 1893.

Poisson, S. D.: 1) Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. *Journal de l' École Polytechnique* cahier 19, p. 249—403; 1823.

2) Sur les intégrales définies et sur la sommation des séries. *Journ. de l' Éc. Pol.* cahier 19, p. 404—509; 1823.

3) Mémoire sur l' équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mém. de l' Acad. de Paris* Bd. 8, p. 357—570; 1829.

4) Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.

5) in *Connaissance des temps.* 1838 [2]).

Porter, M. B.: 1) On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions. *American Journat* Bd. 20, p. 199—214; 1898.

2) Note on the roots of Bessel's functions. *Bulletin of the American Math. Soc.* (2) Bd. 4, p. 274—275; 1898.

3) On the roots of functions connected by a linear recurrent relation of the second order. *Annals of Mathematics* (2) Bd. 3, p. 55—70; 1902.

Lord Rayleigh, J. W. Strutt: 1) Note on Bessel's functions. *Philosophical Magazine* 1872.

---

1) Citat von Burkhardt: Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. Bd. 10, p. 401; 1903.

2) Citat von Burkhardt: ebenda Bd. 10, p. 101; 1901.

2) Note on the numerical calculation of the roots of fluctuating functions. *Proceedings of the London Math. Soc.* Bd. 5, p. 117—124; 1874.
3) On the relation between the functions of Laplace and Bessel. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 9, p. 61—64; 1878.
4) On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 10, p. 4—13; 1879.
5) On pointe, line and plane sources of sound. *Proc. Lond. Math. Soc* Bd. 19, p. 504—507; 1888.
6) On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. *Philosophical Magazine* (5) Bd. 34, p. 145—154; 1892.
7) On the instability of cylindrical fluid surfaces. *Phil. Mag.* (5) Bd. 34, p. 177—180; 1892.
8) Theory of Sound. Bd. I—II; London 1894, 1896.
9) On the passage of electric waves through tubes or the vibrations of dielectric cylinders. *Phil. Mag.* (5) Bd. 43, p. 125—132; 1897.

Riemann, B.: 1) Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe. *Poggendorff Annalen* Bd. 95; 1855. *Werke* p. 57—60.
2) Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Braunschweig 1882.

Riess, G.: Über die Bewegung einer Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefäße. Programm, Wurzen 1881.

Rowland, H. A.: On the propagation of an arbitrary electromagnetic disturbance on spherical waves of light and the dynamical theory of diffraction. *American Journal* Bd. 6, p. 359—382; 1894.

Rudski, P.: Note sur la situation des racines des équations $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = 0$, où J désigne une fonction de Bessel, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *Mémoires de la Soc. Royale de Liège* Bd. 18, 1895.

Särchinger, E.: Beitrag zur Theorie der Funktionen des elliptischen Cylinders. Programm, Chemnitz 1894.

Schafheitlin, P.: 1) Über die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral. *Mathematische Annalen* Bd. 30, p. 157—178; 1887.
2) Über die Integraldarstellung der hypergeometrischen Reihe. *Math. Annalen* Bd. 31, p. 156; 1888.
3) Über die Gaußsche und Besselsche Differentialgleichung und eine neue Integraldarstellung der letzteren. *Journal für Mathematik* Bd. 114, p. 31—44; 1894.
4) Die Nullstellen der Besselschen Funktionen. *Journal für Math.* Bd. 122, p. 299—321; 1900.
5) Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art. *Archiv der Math. und Physik* (3) Bd. 1, p. 133—137; 1901.

Schläfli, L.: 1) Sulle relazione tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. *Annali di Matematica* (2) Bd. 1, p. 232—242; 1868.
2) Einige Bemerkungen zu Herrn Neumanns Theorie der Besselschen Funktionen. *Mathematische Annalen* Bd. 3, p. 134—159; 1871.
3) Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alle funzione cilindriche. *Annali di Mat.* (2) Bd. 5, p. 199—205; 1872.
4) Über die Konvergenz der Entwicklung einer arbiträren Funktion $f(x)$

nach den Besselschen Funktionen $J^a(\beta_1 x)$, $J^a(\beta_2 x)$, $J^a(\beta_3 x)$ ..., wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die positiven Wurzeln der Gleichung $J^a(x) = 0$ vorstellen. *Math. Ann.* Bd. 10, p. 137—142; 1876.

Schlömilch, O.: Über die Besselsche Funktion. *Zeitschrift für Math. und Physik* Bd. 2, p. 137—165; 1857.

Schönholzer, J. J.: Über die Auswertung bestimmter Integrale mit Hilfe von Veränderungen des Integrationsweges. Programm, Bern 1877.

Schumann, F.: Elektromagnetische Rotationserscheinungen flüssiger Leiter. *Wiedemann Annalen* Bd. 32, p 141—164; 1887.

Seger, H. W.: Note on the theory of functions. *Messenger* (2) Bd. 22, p. 181—182; 1893.

Sharpe, H. J.: On Legendre's coefficients. *Quarterly Journal* Bd. 24, p. 383—386; 1890.

Sheppard, W. F.: On some expressions of a function of a single variable in terms of Bessel's functions. *Quarterly Journal* Bd. 23, p. 223—260; 1888.

Siemon, P.: Über die Integrale einer nicht homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Programm, Berlin 1890.

Smith, B. A.: Table of Bessel's functions Y_0 and Y_1. *Messenger* (2) Bd. 26, p. 98—101; 1896.

Sohncke und Wangerin: Über Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen. *Wiedemann Annalen* Bd. 20, p. 198—227, 391—425; 1883.

Sommerfeld, A.: 1) Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik. Diss. Königsberg 1891.

2) Mathematische Theorie der Diffraktion. *Mathematische Annalen* Bd. 47, p. 317—374; 1896.

3) Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines Drahtes. *Wiedemann Annalen* Bd. 67, p. 233—290; 1899.

de Sonin, N. J.: 1) in *Journal de la Soc. math. de Moscou* 1871[1]).

2) Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries. *Mathematische Annalen* Bd. 16, p. 1—80; 1880.

3) Sur les fonctions cylindriques. *Math. Annalen* Bd. 30, p. 582; 1888.

Steinthal, A. E.: On the solution of the equation $(1 - x^2) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \cdot \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$. *Quarterly Journal* Bd. 18, p. 340—346; 1882.

Stern, M. A.: 1) Über die Auflösung der transcendenten Gleichungen. *Journal für Mathematik* Bd. 22, p. 1—62; 1841.

2) Über die Anwendung der Sturmschen Methode auf transcendente Gleichungen. *Journal für Math.* Bd. 33, p. 363—365; 1846.

Stiltjes, T. J.: Recherches sur quelques séries semi-convergentes. *Annales de l'Éc. Normale* (3) Bd. 3, p. 201—258; 1886.

Stokes, G. G.: Supplement to a paper on the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developpements. *Transact. of Cambridge* Bd. 11, p. 412—425; 1869.

---

1) Citat von Sonin: Mathematische Annalen Bd. 16, p. 77; 1880.

Straubel, R.: Über die Berechnung der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Diss. Jena 1888.

Strutt, J. W., s. **Lord Rayleigh**.

Struve, H.: 1) Über den Einfluß der Diffraktion an Fernrohren auf Lichtscheiben. *Memoiren d. Petersburger Akademie* Bd. 30, No. 8; 1882.

2) Beitrag zur Theorie der Diffraktion an Fernrohren. *Wiedemann Annalen* Bd. 17, p. 1008—1016; 1882.

Thiele, G.: Aufgabe der Wellenlehre, ohne jede Vernachlässigung der Diskontinuität, mit Hilfe der Cylinderfunktionen. Diss. Halle 1875.

Thomson, J. J.: 1) Note on $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(sx)}{(a^2+x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx$. *Quarterly Journal* Bd. 15, p. 377—381; 1882.

2) On the electrical oscillations and the effects produced by the motion of an electrified sphere. *Proceedings of the London Math. Soc.* Bd. 15, p. 197—218; 1884.

3) Electrical oscillations of cylindrical conductors. *Proc. Lond. Math. Soc.* Bd. 17, p. 310—328; 1886.

Todhunter, J.: An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions. London 1875.

van Vleck, E. B.: On the roots of Bessel- and P-functions. *American Journal* Bd. 19, p. 75—85; 1897.

Wagner, C.: Beiträge zur Entwicklung der Besselschen Funktionen I. Art. Diss. Bern 1894. *Mitteilungen d. Naturf. Ges.* Bern 1894, p. 204—265.

Walker, G. F.: Some formules for transforming the origin of reference of Bessel's functions. *Messenger* (2) Bd. 25, p. 76—80; 1895.

Wangerin und Sohncke s. **Sohncke und Wangerin**.

Weber, H.: 1) Über einige bestimmte Integrale. *Journal für Math.* Bd. 69, p. 272—297; 1869.

2) Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0$. *Mathematische Annalen* Bd. 1, p. 1—36; 1869.

3) Über die Besselschen Funktionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme. *Journal für Math.* Bd. 75, p. 75—105; 1873.

4) Über die stationären Strömungen der Elektrizität in Cylindern. *Journal für Math.* Bd. 76, p. 1—20; 1873.

5) Über eine Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche Funktionen. *Mathematische Annalen* Bd. 6, p. 146—161; 1873.

6) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. *Math. Ann.* Bd. 37, p. 404—416; 1890.

7) Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Bd. I—II; Braunschweig 1900—1901.

Weber, H. F.: Die wahre Theorie der Fresnelschen Interferenzerscheinungen. *Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. in Zürich* Bd. 24, p. 45—52; 1879.

Wendt, C.: Eine Verallgemeinerung des Additionstheorems der Besselschen Funktionen erster Art. *Monatshefte für Math. und Physik* Bd. 11, p. 125—131; 1900.

Whitehead, C. S.: On the effect of a spherical conducting shell on the induction at a point in the dielectric outside due to an alternating current in a circular circuit in the dielectric inside, the axis of the conductor passing through the centre of the shell. *Philosophical Magazine* (5) Bd. 44, p. 154—165; 1897.

Wilson und Peirce: Table of the first forty roots of the Bessel equation $J^0(x) = 0$ with the corresponding values of $J^1(x)$. *Bulletin of the American Math. Soc.* (2) Bd. 3, p. 153—155; 1897.

Worms de Romilly: Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{\mu + 1}{x} \cdot \frac{d v}{d x} + v = 0$. *Journal de Mathématiques* (3) Bd. 4, p. 177—186; 1878.

Alphabetisches Register.

Autorennamen in Verbindungen wie z. B. Neumannsche Cylinderfunktion, Neumannsche Reihen werden hier im Register nicht für sich zitiert. Unter „Funktion" findet man die spezielleren Funktionen aufgezeichnet, welche im Buche vorkommen.

